



TUGAS AKHIR SM-141501

**PENGENDALIAN KESTABILAN GERAK
LATERAL-DIREKSIONAL PADA PESAWAT LSU-
05 DENGAN METODE KONTROL H_{∞}**

AINUN KUSNUL KHOTIMAH
NRP 1212 100 066

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017



FINAL PROJECT SM-141501

***LATERAL-DIRECTIONAL STABILITY CONTROL
MOTION ON LSU-05 AIRCRAFT BY H_{∞} CONTROL
METHOD***

**AINUN KUSNUL KHOTIMAH
NRP 1212 100 066**

**Supervisor
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2017**

LEMBAR PENGESAHAN

**PENGENDALIAN KESTABILAN GERAK LATERAL-
DIREKSIONAL PADA PESAWAT LSU-05 DENGAN
METODE KONTROL H_{∞}**

***LATERAL-DIRECTIONAL STABILITY CONTROL
MOTION ON LSU-05 AIRCRAFT BY H_{∞} CONTROL
METHOD***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
AINUN KUSNUL KHOTIMAH
NRP. 1212 100 066

Menyetujui,


Dosen Pembimbing,



Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, 18 Januari 2017

PENGENDALIAN KESTABILAN GERAK LATERAL-DIREKSIONAL PADA PESAWAT LSU-05 DENGAN METODE KONTROL H_{∞}

Nama Mahasiswa : Ainun Kusnul Khotimah
NRP : 1212 100 066
Jurusan : Matematika FMIPA
Pembimbing : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

Abstrak

LSU-05 merupakan salah satu jenis UAV yang dikembangkan oleh LAPAN sejak tahun 2013. *LSU-05* memiliki lima kendali permukaan, salah satunya adalah *aileron* yang difungsikan untuk pengendalian sudut gerak *roll*. Agar sudut gerak *roll* sesuai dengan *setpoint* yang diberikan, maka dibutuhkan perancangan sistem kendali. Langkah pertama yang dilakukan adalah pengkajian penurunan persamaan gerak lateral-direksional pesawat. Langkah kedua adalah perancangan sistem kontrol H_{∞} . Kontrol H_{∞} dipilih karena mampu diterapkan dalam permasalahan *linear-matrix-inequalities*. Kontrol H_{∞} terdiri atas dua sistem pengontrol yaitu kontrol optimasi LQ dan kontrol LPV. Setelah kedua sistem kontrol diterapkan, diperoleh hasil sistem stabil menuju titik setimbang 0,2 rad pada waktu 3,7 detik.

Kata Kunci: *LSU-05, gerak lateral-direksional, sudut roll, kontrol H_{∞}*

**LATERAL-DIRECTIONAL STABILITY CONTROL
MOTION ON LSU-05 AIRCRAFT BY
 H_{∞} CONTROL METHOD**

Student's Name : Ainun Kusnul Khotimah
NRP : 1212 100 066
Department : Matematika FMIPA
Supervisor : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

Abstract

LSU-05 is an unmanned aircraft developed by LAPAN since 2013. LSU-05 consists of five kinds of control surface, and of them is aileron which is used to control roll angular motion. To make the roll angular motion stable and follow the setpoint, a control system design that can be applied to LSU-05. The first step is reviewing the mathematical model's equation of lateral-directional. The second step is designing H_{∞} control system. H_{∞} control system was selected in this study being able to be applied in the case of linear-matrix-inequalities (LMI). H_{∞} control system consists of two control system, that is optimization control LQ and LPV control system. After optimization control LQ and LPV control system was applied, simulation result to the system response that is the stability system go to equilibrium in 0,2 rad as long as 3,7 second.

Keywords: *LSU-05, Lateral-directional Motion, Roll Angle, H_{∞} Control*

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh,

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, petunjuk, hidayah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul

**“PENGENDALIAN KESTABILAN GERAK
LATERAL-DIREKSIONAL PADA PESAWAT
LSU-05 DENGAN METODE KONTROL H_{∞} ”**

sebagai salah satu persyaratan untuk menempuh kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Segala dukungan dan bantuan telah penulis dapatkan dari berbagai pihak sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak dan ibu serta seluruh jajaran pegawai dan karyawan Kementrian Pendidikan NKRI selaku pemberi beasiswa Program Bidikmisi sehingga penulis dapat menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
2. Rektor ITS dan Dekan FMIPA ITS beserta jajarannya.
3. Ketua Jurusan Matematika ITS, beserta jajarannya di jurusan Matematika ITS.
4. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasi yang diberikan kepada penulis dalam proses pelaksanaan Tugas Akhir sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
5. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku sekertaris prodi sekaligus dosen wali penulis atas segala bimbingan,

- kesabaran dan motivasi selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak Dr. M. Yunus, M.Si., Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc., Bapak Drs. M. Setijo, M.Si. selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir ini.
 7. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
 8. Segenap pengurus Pustekbang LAPAN serta teman-teman kerja praktek, Terhusus untuk Bapak Ir. Eko Budi Purwanto, M.T. selaku pembimbing kerja praktek di Pustekbang LAPAN yang telah memberikan pengetahuan terkait dalam penyelesaian Tugas Akhir.
 9. Kedua orang tua tercinta atas kesabaran kesabaran dalam mendidik dan membesarkan penulis.
 10. Kakak-kakak (Yu Sulastri, Yu Muntiah, Kang Imam, Mbak Binti, Mas Yasin, Mbak Sum, Mas Syaifuddin, Mas Bambang, Yu Modah, Yu Sulaimah) serta seluruh keluarga yang lain atas segala doanya, kepercayaannya, motivasi, nasihat serta didikan yang selalu diberikan kepada penulis.
 11. Pengasuh Ponpes Mahasiswi Muhyiddin Gebang Kidul atas bimbingan serta nasihat serta teman-teman yang setia menyemangati dan mengingatkan penulis selama belajar disana.
 12. Teman-teman Ibnu Muqlah, PSDM HIMATIKA ITS, Matematika angkatan 2012, Ponpes Mahasiswi Muhyiddin dan *Extension* yang telah memberikan persahabatan serta pelajaran dalam banyak hal.
 13. Seluruh pihak yang tak mampu penulis sebutkan satu persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran

yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Surabaya, 15 Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK	i
ABSTRACT	iii
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SIMBOL	v

BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan	4

BAB II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 LSU-05	7
2.2 <i>Control Surface</i>	9
2.3 Sistem Salib Sumbu.....	11
2.4 Penurunan Persamaan Gerak Pesawat.....	20
2.5 Teori Matematika Sistem	27
2.6 Sistem Kendali H_∞	30

BAB III. METODE PENELITIAN

3.1 Studi Literatur.....	35
3.2 Analisa Pemodelan Gerak Lateral-direksional	
LSU-05	35
3.3 Perancangan Kendali H_∞	35
3.4 Simulasi dan Penarikan Kesimpulan	36
3.5 Penyusunan Laporan Akhir	37

BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Linearisasi Persamaan Gerak Lateral-direksional	39
4.2 Uji Kestabilan, Keterkontrolan, dan Keteramatan.....	53
4.3 Desain Kontrol H_{∞}	57
4.4 Simulasi dengan Simulink MATLAB	65

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan.....	81
5.2 Saran	82

DAFTAR PUSTAKA	83
-----------------------------	----

LAMPIRAN	85
-----------------------	----

DAFTAR GAMBAR

2.1	LSU-05	7
2.2	Sistem Kontrol Permukaan Pesawat	9
2.3	Sistem Sumbu Badan	12
2.4	Sistem Sumbu Bumi	14
2.5	Sistem Sumbu Angin	15
2.6	Rotasi Terhadap Sumbu X_B	15
2.7	Rotasi Terhadap Sumbu Y_B	17
2.8	Rotasi Terhadap Sumbu Z_B	18
2.9	Komponen Gaya Gravitasi oleh Gerak <i>Pitch</i>	22
2.10	Komponen Gaya Garvitasi oleh Gerak <i>Roll</i>	22
2.11	Orientasi Angular dan Kecepatan dari Vektor Gravitasi (g) Relatif Terhadap Sumbu Badan	27
2.12	Kontrol LPV dari Sistem LPV	31
3.1	Diagram Alir Metode Penelitian	38
4.1	Diagram Blok Simulink Sistem Awal	68
4.2	Hasil Keluara ϕ pada Sistem Awal	70
4.3	Representasi Diagram Blok pada Sistem dengan Kontrol Optimasi LQ	71
4.4	Keluaran Sudut <i>Roll</i> (ϕ) dengan Menggunakan Kendali Optimasi LQ	72
4.5	Keluaran Error Sudut <i>Roll</i> (ϕ)	74
4.6	Representasi Diagram Blok pada Sistem dengan Kontrol LPV	76
4.7	Keluaran Sudut <i>Roll</i> (ϕ) dengan Kontrol LPV	78

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Spesifikasi LSU-05	7
Tabel 2.2 Komponen Arah Gaya, Momen, dan Kecepatan pada Sumbu X_B , Y_B , dan Z_B ..	13

DAFTAR SIMBOL

P	Kecepatan sudut pada sumbu x
Q	Kecepatan sudut pada sumbu y
R	Kecepatan sudut pada sumbu z
X	Gaya pada sumbu x
Y	Gaya pada sumbu y
Z	Gaya pada sumbu z
L	Momen <i>rolling</i>
M	Momen <i>pitching</i>
N	Momen <i>yawing</i>
ϕ	Sudut <i>roll</i>
θ	Sudut <i>pitch</i>
ψ	Sudut <i>yaw</i>
β	Sudut selip
δ_A	Defleksi <i>aileron</i>
δ_T	Defleksi <i>throttle</i>
u	Kecepatan seara sumbu x

v	Kecepatan searah sumbu y
w	Kecepatan serah sumbu z
U_c	Vektor kontrol
ξ	Vektor gangguan
x	Variabel sistem
A	Matriks keadaan
B	Matriks Masukkan
B_1	Matriks gangguan
C	Matriks Keluaran
G	Matriks Masukkan
H	Matriks Keluaran
Q_c	Matriks semidefinit positif
R_c	Matriks definit positif
P_c	Solusi Aljabar Riccati pada Gain Kontrol LQ
Q_K	Matriks semidefinit positif
R_K	Matriks definit positif
P_∞	Solusi Aljabar Riccati pada Gain kontrol LPV

K_{LQ}	Gain LQ
K_{LPV}	Gain LPV
e	Error variabel keadaan
ε	Variabel estimasi pengamatan
r	Referensi <i>setpoint</i>
λ	Nilai eigen
M_c	Matriks keterkontrolan
M_o	Matriks Keteramatan
i	imajiner
$\hat{l}, \hat{j}, \hat{k}$	vektor
i	iterasi

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam beberapa tahun terakhir, teknologi kedirgantaraan di Indonesia semakin berkembang. Salah satunya adalah dalam bidang pengembangan pesawat tanpa awak atau yang lebih dikenal dengan *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV). Dalam pengembangannya dibutuhkan banyak disiplin ilmu terkait pelaksanaan penelitian dan pengembangan termasuk instrumen-instrumen yang ada di dalamnya, salah satu diantaranya yaitu adanya sistem kontrol (*control system*). *Control system* ini dirancang dengan tujuan agar *plant* mampu terbang secara mandiri dalam pelaksanaan misi yang diberikan.

UAV pada saat ini memiliki peran dan aplikasi yang semakin berkembang, antarlain dalam bidang militer, ilmu kebumihantaran untuk pengambilan citra suatu wilayah, dan pada bidang lainnya. UAV dapat digunakan untuk pekerjaan yang memiliki resiko cukup tinggi. Seperti melihat kondisi suatu wilayah yang terkena radiasi. UAV didesain dengan ukuran yang kecil, tidak mengeluarkan suara bising dan warna yang dikaburkan membuat UAV dapat berbaur dengan awan dan sulit diketahui oleh manusia. Oleh karena itu, UAV sering digunakan dalam dunia militer untuk mengawasi musuh.

Di Indonesia, UAV diteliti dan dikembangkan oleh beberapa instansi Negara seperti PT. Dirgantara Indonesia, LAPAN, PT. UAV Indo,

Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT), PT. LEN, dan lain sebagainya. UAV yang dikembangkan oleh LAPAN yaitu LAPAN *Surveillance-01* (LSU-01), LAPAN *Surveillance-02* (LSU-02), LAPAN *Surveillance-03* (LSU-03), dan LAPAN *Surveillance-05* (LSU-05).

Dalam tugas akhir ini, yang dijadikan objek penelitian adalah LAPAN *Surveillance-05* (LSU-05). Menurut spesifikasi yang ditetapkan, LSU-05 dirancang untuk terbang *nonstop* 200 KM dengan *endurance* minimal 6 jam, dengan kecepatan jelajah 30 m/s. Misi yang diberikan pada LSU-05 adalah untuk kegiatan penelitian, observasi, petrol, pengawasan wilayah perbatasan dan mitigasi bencana. [1]

Metode kontrol H_{∞} merupakan salah satu metode dari *robust control*. Dalam pelaksanaannya digunakan *gain feedback* dengan tujuan untuk memperoleh suatu sistem yang stabil. Dalam penerapannya digunakan suatu sistem persamaan *Linear Parameter Varying* (LPV). Hal ini dikarenakan metode ini berfungsi untuk pengontrolan perilaku *plant* yang dinamis. Selain itu, metode ini juga dapat digunakan untuk penyelesaian permasalahan pada kasus terjadinya gangguan pada sistem ketika *plant* tersebut bekerja.

Pesawat LSU-05 dikembangkan menjadi pesawat terbang dengan sistem kontrol mandiri (*autonomous system*). Untuk mewujudkan gagasan tersebut, pesawat harus dilengkapi dengan sistem kontrol yang sesuai dan handal. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini, dirancang sistem kontrol H_{∞} .

Metode H_∞ dipilih karena metode ini mampu diterapkan dalam permasalahan multivarian dengan *cross coupling* [2]. Dengan menggunakan kontroler H_∞ diharapkan karakteristik respon LSU-05 sesuai dengan rancangan dan mempunyai kestabilan terbang.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana perancangan sistem kontrol dengan metode kontrol H_∞ dan mendapatkan nilai parameter kontrol untuk menjaga kestabilan terbang LSU-05 dengan masukan defleksi *aileron* dan defleksi *rudder*.

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Model dinamika terbang UAV diturunkan pada persamaan gerak lateral-direksional dalam bentuk persamaan keadaan (*state space*).
2. Pengendalian pada kondisi terbang *cruise*, yaitu dimana pesawat memiliki kecepatan tetap.
3. Identifikasi parameter dilakukan dengan data *dummy* pada gerak lateral-direksional.
4. Variabel yang dikontrolkan adalah sudut *roll*.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan Tugas Akhir ini adalah perancangan sistem kontrol H_∞ dan mendapatkan nilai parameter kontrol untuk menjaga kestabilan terbang LSU-05 dengan masukan berupa defleksi *aileron* dan defleksi *rudder*.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat yang ingin dicapai dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan kontribusi untuk perkembangan dalam ilmu pengetahuan khususnya teknik kedali untuk UAV.
2. Hasil simulasi dapat dipakai sebagai referensi dalam implementasi ke perangkat keras (*Hardware*) sistem kontrol pada LSU-05.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II berisikan tentang LSU-05 serta konsep-konsep dasar penunjang perancangan sistem kendali H_∞ seperti definisi *control surface*, sistem salib sumbu, penurunan persamaan gerak pesawat, teori matematika sistem, serta konsep tentang sistem kendali H_∞ .

3. BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan - tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan tugas akhir. Tahapan - tahapan tersebut antara lain studi literatur, analisa pemodelan gerak lateral-direksional pada pesawat LSU-05, perancangan control H_∞ , simulasi dan penarikan kesimpulan, dan penyusunan laporan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV dilakukan linearisasi terhadap persamaan gerak lateral-direksional pesawat LSU-05, pengujian kestabilan, keterkontrolan serta keteramatan dengan menggunakan teori matematika sistem, perancangan kendali H_∞ pada pesawat LSU-05 dan simulasi sistem kendali H_∞ pada sistem persamaan gerak lateral-direksional pesawat LSU-05.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan tugas akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 LSU-05

Pesawat LSU-05 merupakan *plant* yang digunakan dalam Tugas Akhir ini, dengan *mock up* dan spesifikasi yang dapat dilihat dalam Gambar 2.1 dan pada Tabel 2.1 sebagai berikut [1]:



Gambar 2.1. LSU-05

Tabel 2.1. Spesifikasi LSU-05

Simbol	Nama	Besaran	Keterangan
MTOW	Maximum Take Off Weight	75,08 Kg	$W = m. g$
M	Massa total	7,7346 Kg	Massa pesawat termasuk muatan bahan bakar
U_0	Kecepatan <i>cruise</i>	27,78 m/s	Kecepatan UAV pada

			saat keadaan <i>cruise</i>
b	Panjang bentangan sayap	5,5 m	Bentangan sayap
S	Luas permukaan sayap	3,32 m ²	
H	Tinggi terbang	6000 m	
ρ	Massa jenis udara	0,6601 Km/m ³	Kerapatan udara di 6000 m
T	Lama terbang	6 jam	Lama terbang berdasarkan bahan bakar
π	Phi	3,14	
λ	Gamma	$\pi/180$	
Q	Kecepatan rotasi	$0,5 \times \rho \times U_0$	Kecepatan terhadap sumbu- Y
E	Bilangan Oswald	0,9	
Mach	Bilangan Mach	0,5	

2.2 Control Surface

Sistem kontrol permukaan suatu pesawat terdiri dari *ailerons*, *elevator*, *rudder*, *throttle*, dan *flaps*. Ke-lima posisi tersebut digambarkan sesuai pada Gambar 2.2 sebagai berikut:



Gambar 2.2 Sistem Kontrol Permukaan Pesawat pada LSU-05

2.2.1. Ailerons

Ailerons merupakan bidang kontrol pada saat pesawat melakukan gerakan *roll*. Letak *aileron* terbentang dari tengah sayap sampai keujung sayap pesawat yang bergerak keatas dan kebawah secara berlawanan pada setiap sayap misalnya pada saat pesawat akan *rolling* kesebelah kiri maka *aileron* pada sayap kiri naik dan *aileron* pada sayap kanan turun. Pada saat *aileron* naik maka terjadi pengurangan *lift* (gaya angkat). Hal ini dikarenakan *aileron* yang naik menyebabkan berkurangnya aliran udara pada sayap kiri sehingga sayap kiri mengalami pengurangan gaya angkat

sehingga sayap terdorong turun. Sementara pada sayap kanan *aileron* turun sehingga menyebabkan tekanan udara terakumulasi dan mengaibatkan sayap kanan naik.

2.2.2. Elevator

Elevator merupakan bidang kontrol pada saat pesawat melakukan *pitch* (*pitch up* atau *pitch down*) yang bergerak pada sumbu lateral (sumbu sayap) dan terletak pada *horizontal stabilizer*. *Elevator* dikontrolkan dari *cockpit* dengan menggunakan *stick control*. *Elevator* berfungsi untuk menjaga kestabilan pesawat dalam arah longitudinal. Pergerakan elevator kanan dan kiri secara bersamaan.

Cara kerja *elevator* yaitu ketika pesawat akan melakukan gerakan *pitch up* maka pilot akan menggerakkan *stick control*-nya kebelakang dan mendapat respon dengan naiknya *elevator*. Dengan naiknya *elevator* maka terjadi penurunan gaya aerodinamika pesawat yang menekan *tail* kebawah sehingga nose naik.

2.2.3. Rudder

Rudder merupakan bidang kontrol pada saat pesawat melakukan *yaw*. *Rudder* terletak pada *vertical stabilizer* dan bergerak pada sumbu vertikal (sumbu memanjang yang tegak lurus dengan *Center of Gravity* dari pesawat). *Rudder* dikontrolkan dari *cockpit* menggunakan *rudder pedal*. *Rudder* berfungsi untuk menstabilkan pesawat dalam arah direksional. Pergerakannya berdefleksi kearah kiri atau kanan.

Rudder bekerja dengan perantara sistem mekanik yang bernama *rudder pedal*. Terdapat dua *rudder pedal* pada pesawat yaitu pedal rudder kanan dan kiri yang

masing-masing berfungsi untuk gerak *yaw* kanan dan *yaw* kiri. Jika pilot ingin melakukan gerakan *yaw* ke arah kiri maka pedal *rudder* yang ditekan (diinjak) adalah pedal *rudder* disebelah kiri, secara mekanik diartikan *rudder* berdefleksi ke kiri, sehingga timbul gaya aerodinamik yang menekan *rudder* yang berdefleksi, sehingga ekor (*tail*) bergerak ke kanan dan nose akan bergerak ke kiri atau bisa disebut pesawat *yaw* ke kiri.

2.2.4. Throttle

Throttle merupakan gerakan yang mengkonversi putaran dari mesin piston atau turboprop untuk memberikan gaya dorong pada pesawat sehingga pesawat dapat bergerak kedepan.

2.2.5. Flaps

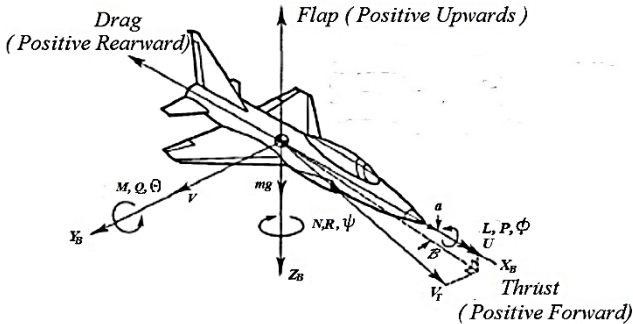
Flaps (sirip sayap pesawat) merupakan sebuah permukaan yang berengsel pada tepi belakang sayap. Jika *flaps* diturunkan maka kecepatan jatuh (*stall speed*) pesawat mengalami penurunan. *Flaps* mengurangi kecepatan jatuh dengan menambahkan kembar sayap dan dengan demikian meningkatkan efisiensi gaya angkat maksimum.

2.3 Sistem Salib Sumbu

Pada suatu benda terbang terdapat 3 sumbu koordinat yang digunakan untuk keperluan analisa gerak. Ketiga sumbu koordinat tersebut yaitu sumbu yang mengacu pada badan pesawat, sumbu yang mengacu pada bumi, dan sumbu yang mengacu pada arah angin. Untuk mengetahui kedudukan pesawat terhadap bumi, dilakukan transformasi dengan menggunakan transformasi sudut *Euler*.

2.3.1 Sistem Sumbu Badan

Sistem sumbu badan merupakan suatu sumbu yang mengacu pada badan pesawat seperti pada Gambar 2.3 sebagai berikut:



Gambar 2.3 Sistem Sumbu Badan

Dimana sumbu X_B sepanjang sumbu longitudinal pesawat positif ke depan. Sumbu Z_B merupakan sumbu pada bidang simetri tegak pesawat dan tegak lurus terhadap sumbu X_B dalam kedudukan terbang datar positif kebawah. Sementara sumbu Y_B merupakan sumbu yang tegak lurus terhadap bidang simetri dan bidang positif kearah kanan.

Pada sistem sumbu badan terjadi gerak translasi, dan rotasi. Gerak translasi pesawat diberikan oleh komponen kecepatan yaitu U, V, W pada arah sumbu X_B, Y_B , dan Z_B . Sedangkan gerak rotasi pesawat diberikan oleh komponen kecepatan sudut P, Q , dan R . Kecepatan rotasi mengakibatkan terjadinya momen pada sumbu X_B, Y_B , dan Z_B . Gerak rotasi yang terjadi sumbu X_B disebut dengan gerak *roll*, dimana L sebagai momen dan P sebagai kecepatan. Gerak rotasi pada yang terjadi pada sumbu Y_B disebut dengan gerak *pitch*, dimana M sebagai momen dan Q sebagai kecepatan. Gerak rotasi pada yang

terjadi pada sumbu Z_B disebut dengan gerak *yaw*, dimana N sebagai momen dan R sebagai kecepatan.

Berikut disajikan tabel komponen arah gaya, momen dan kecepatan pada sumbu X_B , Y_B , Z_B sebagai berikut:

Tabel 2.2 Komponen Arah Gaya, Momen, dan Kecepatan pada Sumbu X_B , Y_B , dan Z_B

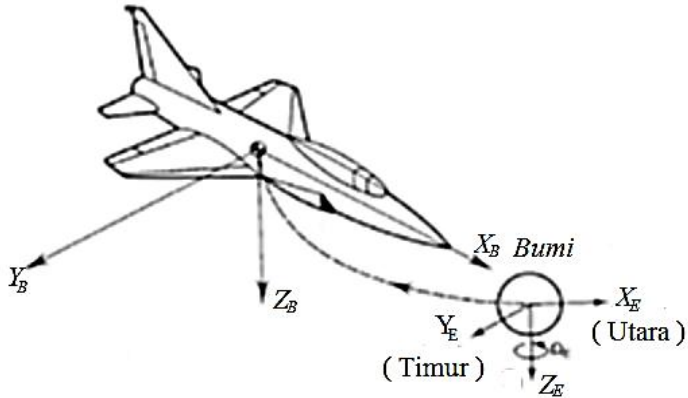
	Sumbu X_B (<i>Roll</i>)	Sumbu Y_B (<i>Pitch</i>)	Sumbu Z_B (<i>Yaw</i>)
Kecepatan Sudut	P	Q	R
Kecepatan Translasi	U	V	W
Gaya Aerodinamika	X	Y	Z
Momen Aerodinamika	L	M	N
Momen Inersia	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Perubahan Sudut	Φ	Θ	Ψ

Pada masing – masing sumbu X_B , Y_B , dan Z_B mempunyai kecepatan linier U , V , W dan mempunyai kecepatan sudut P, Q, R . Sedangkan untuk kecepatan sudut P, Q, R mempunyai momen yaitu L, M, N dan momen inersia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} .

2.3.2 Sistem Sumbu Bumi

Sistem sumbu bumi merupakan sistem koordinat objek yang mereferensi terhadap bumi. Sistem ini menyebabkan orientasi pada sistem sumbu badan pesawat sehingga berubah sesuai dengan gerak wahana pesawat jika diacukan dengan sumbu bumi. Sumbu bumi pada umumnya mengacu pada arah mata angin. Pada sumbu bumi terdapat 3 acuan yaitu X_E, Y_E, Z_E . Sumbu X_E menuju kearah utara, sumbu Y_E menuju kearah timur, dan

sumbu Z_E menuju kearah pusat bumi. Hal tersebut sesuai dengan Gambar 2.4 sebagai berikut:

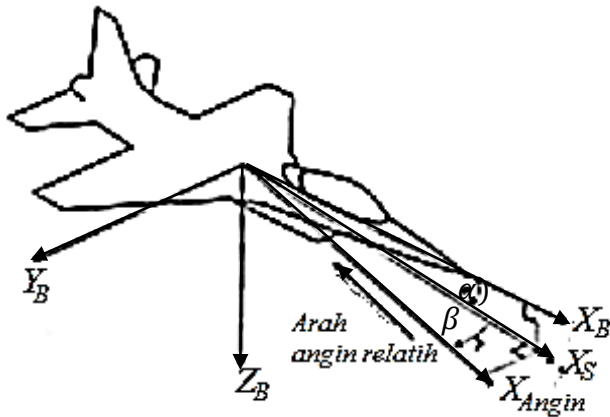


Gambar 2.4: Sistem Sumbu Bumi

Pada Gambar 2.4 terlihat bahwa sistem sumbu badan pesawat dengan sistem sumbu bumi memiliki arah yang berbeda. Perbedaan ini dapat ditransformasikan dengan sudut Euler (Φ, Θ, Ψ). Pada umumnya sudut (Φ, Θ, Ψ) digunakan untuk menentukan *altitude* pesawat. Sistem sumbu bumi digunakan sebagai referensi dari efek gravitasi, posisi pesawat, perubahan jarak horizontal, dan juga orientasi wahana.

2.3.3 Sistem Sumbu Angin

Sumbu angin merupakan salib sumbu badan pesawat relatif terhadap arah datangnya angin. Hubungan antara koordinat angin dengan koordinat badan pesawat ditentukan oleh dua sudut yaitu sudut serang (α) dan sudut slip samping (β) yang ditunjukkan sesuai dengan Gambar 2.5.



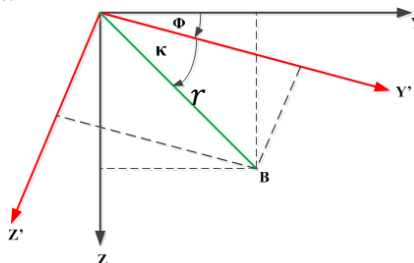
Gambar 2.5 Sistem Sumbu Angin

Berdasarkan pada Gambar 2.5 diketahui bahwa sudut serang α merupakan sudut yang dihasilkan dari perbedaan arah sumbu X_B dan sumbu X_S . Sudut selip β merupakan sudut yang terbentuk antara sumbu X_{Angin} dan X_S . Sumbu X positif pada sumbu angin berlawanan arah dengan arah datangnya angin.

2.3.4 Transformasi Sumbu Koordinat Pesawat

Untuk mengetahui koordinat badan pesawat terhadap koordinat bumi, maka ditentukan 3 rotasi yaitu:

1. Rotasi terhadap sumbu X_B bernilai positif jika sayap kanan pesawat bergerak kebawah (*roll* Φ) sebagai berikut:



Gambar 2.6 Rotasi Terhadap Sumbu X_B

Dari Gambar 2.6 diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 X'_B &= X_B \\
 Y'_B &= r \cos \kappa \\
 Z'_B &= r \sin \kappa \\
 Y_B &= r \cos(\kappa + \Phi) \\
 &= r \cos \kappa \cos \Phi - r \sin \kappa \sin \Phi \\
 &= Y'_B \cos \Phi - Z'_B \sin \Phi \\
 Z_B &= r \sin(\kappa + \Phi) \\
 &= r \sin \kappa \cos \Phi + r \cos \kappa \sin \Phi \\
 &= Z'_B \cos \Phi - Y'_B \sin \Phi
 \end{aligned}$$

Dari persamaan Y_B dan Z_B diatas diperoleh persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y'_B \\ Z'_B \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y'_B \\ Z'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_B \\ Z_B \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa $X'_B = X_B$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} X'_B \\ Y'_B \\ Z'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

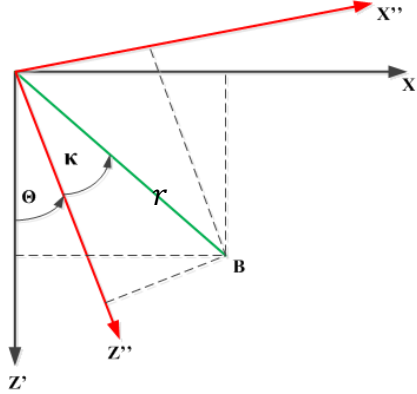
Dari persamaan (2.1) diperoleh

$$x' = R_\phi x$$

dengan

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2. Rotasi terhadap sumbu Y_B bernilai positif jika hidung pesawat bergerak ke atas (*pitch* (Θ)) sesuai Gambar 2.27 berikut:



Gambar 2.7 Rotasi Terhadap Sumbu Y_B

Dari Gambar 2.7 diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Y_B'' &= Y_B' \\
 X_B'' &= r \sin \kappa \\
 Z_B'' &= r \cos \kappa \\
 X_B' &= r \sin(\kappa + \Theta) \\
 &= r \sin \kappa \cos \Theta + r \cos \kappa \sin \Theta \\
 &= X_B'' \cos \Theta + Z_B'' \sin \Theta \\
 Z_B' &= r \cos(\kappa + \Theta) \\
 &= r \cos \kappa \cos \Theta - r \sin \kappa \sin \Theta \\
 &= Z_B'' \cos \Theta - Y_B'' \sin \Theta
 \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas diperoleh persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} X_B' \\ Z_B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B'' \\ Z_B'' \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} X_B'' \\ Z_B'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B' \\ Z_B' \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa $Y_B'' = Y_B'$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} X_B'' \\ Y_B'' \\ Z_B'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B' \\ Y_B' \\ Z_B' \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

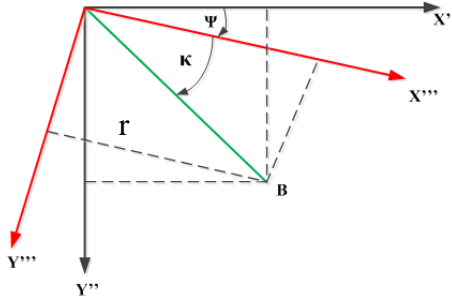
Dari persamaan (2.3) diperoleh

$$x' = R_\Theta x$$

dengan

$$R_\Theta = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

3. Rotasi terhadap sumbu Z_B bernilai positif jika hidung pesawat bergerak ke atas ($yaw \Psi$) sesuai Gambar 2.8 berikut:



Gambar 2.8 Rotasi Terhadap Sumbu Z_B

Dari Gambar 2.8 diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$Z_B''' = Z_B''$$

$$X_B''' = r \cos \kappa$$

$$Y_B''' = r \sin \kappa$$

$$X_B'' = r \cos(\kappa + \Psi)$$

$$= r \cos \kappa \cos \Psi - r \sin \kappa \sin \Psi$$

$$= X_B''' \cos \Psi - Y_B''' \sin \Psi$$

$$Y_B'' = r \sin(\kappa + \Psi)$$

$$= r \sin \kappa \cos \Psi + r \cos \kappa \sin \Psi$$

$$= Y_B''' \cos \Psi + X_B''' \sin \Psi$$

Dari persamaan di atas diperoleh persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} X_B'' \\ Y_B'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B''' \\ Y_B''' \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} X_B''' \\ Y_B''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \\ -\sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B'' \\ Y_B'' \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa $Z_B''' = Z_B''$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} X_B''' \\ Y_B''' \\ Z_B''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B'' \\ Y_B'' \\ Z_B'' \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Dari persamaan (2.5) diperoleh

$$x' = R_\psi x$$

dengan

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.2), (2.4), dan (2.6) diperoleh persamaan matriks transformasi untuk gerak rotasi sebagai berikut:

$$R = [R_\psi][R_\theta][R_\phi]$$

$$R =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} C\Psi C\Theta & S\Psi & -C\Psi S\Theta \\ -S\Psi & C\Psi & S\Psi S\Theta \\ S\Theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\Phi & S\Phi \\ 0 & -S\Phi & C\Phi \end{bmatrix}$$

$$R =$$

$$\begin{bmatrix} C\Psi C\Theta & S\Psi C\Phi + C\Psi S\Psi S\Theta & S\Psi S\Phi - C\Psi C\Phi S\Theta \\ -S\Psi & C\Psi C\Theta - S\Psi S\Phi S\Theta & C\Psi S\Phi + S\Psi C\Phi S\Theta \\ S\Theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Dengan $C = \cos$ dan $S = \sin$.

2.4 Penurunan Persamaan Gerak Pesawat

Persamaan gerak UAV yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah persamaan gerak LSU-05 yang dibedakan atas gerak translasi dan gerak rotasi. terdapat beberapa asumsi dalam penurunan persamaan keadaan LSU-05 sebagai berikut;

- Pesawat dianggap sebagai benda tegar (kaku).
- Muatan pesawat berada pada badan pesawat.
- Kecepatan pesawat pada saat terbang dianggap konstan.

2.4.1 Gerak Translasi

Gerak translasi merupakan gerak yang diakibatkan oleh pergeseran benda atau pesawat yang diakibatkan oleh adanya gaya. Penurunan persamaan gerak translasi diawali dari Hukum II Newton yaitu:

$$\sum F = ma$$

dimana:

$\sum F$: jumlah resultan gaya yang bekerja pada pesawat
[N]

m : massa elemen pesawat [Kg]

a : percepatan gerak translasi [m/sec^2]

Resultan gaya yang terjadi pada pesawat yaitu :

$$\sum F = F + F_{gravity} \quad (2.8)$$

sedangkan resultan gaya pada gerak translasi terhadap sumbu bumi diberikan sebagai berikut ;

$$\sum F = m \left(\frac{d}{dt} v_T \right)_E \quad (2.9)$$

dengan

$$\left(\frac{d}{dt} v_T \right)_E = \left(\frac{d}{dt} v_T \right)_B + \omega \times v_T$$

Sehingga persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai berikut

$$\Sigma F = m \left(\frac{d}{dt} v_T|_B + \omega \times v_T \right) \quad (2.10)$$

dengan :

v_T : kecepatan gerak translasi pesawat [m/sec]

ω : kecepatan angular pesawat [rad/sec]

diketahui bahwa vektor kecepatan linier dan kecepatan sudut angular adalah

$$\mathbf{v}_T = \hat{i}U + \hat{j}V + \hat{k}W \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{i}P + \hat{j}Q + \hat{k}R \quad (2.12)$$

sehingga,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_T)|_B = \hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W} \quad (2.13)$$

dan operasi perkalian *cross* kecepatan sudut angular dengan kecepatan translasi menghasilkan

$$\begin{aligned} \omega \times \mathbf{v}_T &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(QR - VR) + \hat{j}(UR - PW) + \\ &\quad \hat{k}(PV - UQ) \end{aligned} \quad (2.14)$$

substitusi persamaan (2.13) dan (2.14) kepersamaan (2.10) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m \left((\hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W}) + (\hat{i}(QR - VR) + \right. \\ &\quad \left. \hat{j}(UR - PW) + \hat{k}(PV - UQ)) \right) \\ &= m(\hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W} + \hat{i}(QR - VR) + \hat{j}(UR - \\ &\quad PW) + \hat{k}(PV - UQ)) \\ &= m(\hat{i}(\dot{U} + QW - VR) + \hat{j}(\dot{V} + UR - PW) + \\ &\quad \hat{k}(\dot{W} + PV - UQ)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Karena $\sum F$ merupakan jumlah resultan gaya yang terjadi pada sumbu X, Y, Z atau dapat ditulis sebagai

$$\sum F = \sum F_X + \sum F_Y + \sum F_Z$$

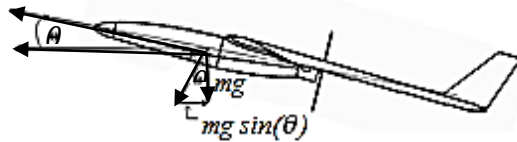
Sehingga persamaan (2.14) menjadi

$$\sum F_X = m(\dot{U} + QW - VR) \quad (2.16)$$

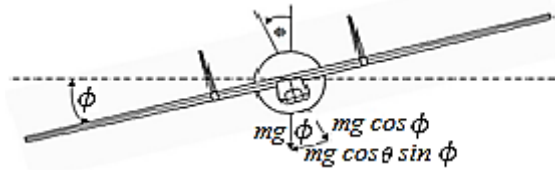
$$\sum F_Y = m(\dot{V} + UR - PW) \quad (2.17)$$

$$\sum F_Z = m(\dot{W} + PV - UQ) \quad (2.18)$$

Gaya gravitasi bumi diilustrasikan sesuai gambar berikut:



Gambar 2.9 Komponen Gaya Gravitasi oleh Gerak *Pitch*



Gambar 2.10 Komponen Gaya Gravitasi oleh Gerak *Roll*

Dari ilustrasi Gambar 2.9 diketahui bahwa pada saat pesawat melakukan gerak *pitch up* sebesar θ maka berat pesawat akibat gaya gravitasi juga bergeser ke depan sebesar sudut θ . Sedangkan ilustrasi pada Gambar 2.10 diketahui bahwa pada saat pesawat melakukan gerak *roll* ke kanan sebesar ϕ , maka gaya berat pesawat juga akan bergeser ke kanan sebesar ϕ . Oleh karena itu, diperoleh persamaan gaya gravitasi sebagai berikut:

$$(F_X)_{gravity} = -mg \sin \Theta \quad (2.19)$$

$$(F_Y)_{gravity} = mg \cos \Theta \sin \Phi \quad (2.20)$$

$$(F_Z)_{gravity} = mg \cos \Theta \sin \Phi \quad (2.21)$$

Diketahui pada persamaan (2.8) bahwa $\sum F = F + F_{gravity}$, sehingga persamaan (2.16) – (2.18) dan (2.19) – (2.21) diperoleh

$$\sum F_X = F_X + (F_X)_{gravity} = m(\dot{U} + QW - VR)$$

$$F_X - mg \sin \Theta = m(\dot{U} + QW - VR)$$

$$F_X = m(\dot{U} + QW - VR + g \sin \Theta) \quad (2.22)$$

$$\sum F_Y = F_Y + (F_Y)_{gravity} = m(\dot{V} + UR - PW)$$

$$F_Y + mg \cos \Theta \sin \Phi = m(\dot{V} + UR - PW)$$

$$F_Y = m(\dot{V} + UR - PW - g \cos \Theta \sin \Phi) \quad (2.23)$$

$$\sum F_Z = F_Z + F_Z = m(\dot{W} + PV - UQ)$$

$$F_Z + mg \cos \Theta \sin \Phi = m(\dot{W} + PV - UQ)$$

$$F_Z = m(\dot{W} + PV - UQ - g \cos \Theta \sin \Phi) \quad (2.24)$$

Karena $F_X = X$, $F_Y = Y$ dan $F_Z = Z$ maka persamaan (2.22), (2.23), dan (2.24) dapat ditulis sebagai berikut:

$$X = m(\dot{U} + QW - VR + g \sin \Theta) \quad (2.25)$$

$$Y = m(\dot{V} + UR - PW - g \cos \Theta \sin \Phi) \quad (2.26)$$

$$Z = m(\dot{W} + PV - UQ - g \cos \Theta \sin \Phi) \quad (2.27)$$

2.4.2 Gerak Rotasi

Momen angular didefinisikan sebagai berikut:

$$H = I\omega \quad (2.28)$$

dimana

H : momen angular [Kgm^2rad/sec]

I : momen inersia [$Kg m^2$]

Dengan matriks momen inersianya sebagai berikut:

$$I = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.29) kepersamaan (2.28) diperoleh

$$H = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx}P - I_{xy}Q - I_{xz}R \\ -I_{xy}P + I_{yy}Q - I_{yz}R \\ -I_{xz}P - I_{yz}Q + I_{zz}R \end{bmatrix}$$

Dengan H tersusun atas komponen – komponen h_x, h_y dan h_z , sehingga

$$h_x = I_{xx}P - I_{xy}Q - I_{xz}R \quad (2.30)$$

$$h_y = -I_{xy}P + I_{yy}Q - I_{yz}R \quad (2.31)$$

$$h_z = -I_{xz}P - I_{yz}Q + I_{zz}R \quad (2.32)$$

Pada kondisi terbang simetri, sumbu XZ pada pesawat dianggap simetri. Artinya gerak roket dianggap gerak 2 dimensi yang tidak melibatkan sumbu Y , maka I_{xy} dan I_{yz} dianggap nol. Sehingga persamaan (2.30) –

(2.32) dapat dirubah kedalam persamaan (2.33)-(2.35) sebagai berikut:

$$h_x = I_{xx}P - I_{xz}R \quad (2.33)$$

$$h_y = I_{yy}Q \quad (2.34)$$

$$h_z = -I_{xz}P + I_{zz}R \quad (2.35)$$

Torsi pada pesawat didefinisikan sebagai berikut

$$\tau = \frac{d}{dt}(\mathbf{H})_E + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \quad (2.36)$$

Substitusi persamaan (2.28) ke persamaan (2.36) sehingga diperoleh

$$\tau = I \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \quad (2.37)$$

Nilai dari $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ dan dari persamaan (2.12) diperoleh

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = \hat{i}\dot{P} + \hat{j}\dot{Q} + \hat{k}\dot{R}$$

Sehingga nilai $\frac{d}{dt}(\mathbf{H})_E$ yaitu

$$I \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{P} - I_{xy}\dot{Q} - I_{xz}\dot{R} \\ -I_{xy}\dot{P} + I_{yy}\dot{Q} - I_{yz}\dot{R} \\ -I_{xz}\dot{P} - I_{yz}\dot{Q} + I_{zz}\dot{R} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

dan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} \\ &= (Qh_z - Rh_y)\hat{i} + (Rh_x - Ph_z)\hat{j} + \\ &\quad (Ph_y - Qh_x)\hat{k} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Substitusi persamaan (2.30) – (2.32) ke persamaan (2.39), sehingga diperoleh persamaan (2.40).

$$\omega \times H = (-PQI_{xz} + RQI_{zz} - RQI_{yy})\hat{i} + (PRI_{xx} - R^2I_{xz} + P^2I_{xz} - PRI_{zz})\hat{j} + (PQI_{xx} - RQI_{xz} - PQI_{yy})\hat{k} \quad (2.40)$$

Subtitusikan persamaan (2.38), (2.39) dan (2.40) ke dalam persamaan (2.37), sehingga diperoleh

$$\tau = (\hat{i}\dot{P} + \hat{j}\dot{Q} + \hat{k}\dot{R}) + (-PQI_{xz} + RQI_{zz} - RQI_{yy})\hat{i} + (PRI_{xx} - R^2I_{xz} + P^2I_{xz} - PRI_{zz})\hat{j} + (PQI_{xx} - RQI_{xz} - PQI_{yy})\hat{k}$$

Persamaan tersebut bias ditulis berdasarkan komponen pada setiap sumbu yaitu

$$\tau_x = I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + QR(I_{zz} - I_{yy}) \quad (2.41)$$

$$\tau_y = I_{yy}\dot{Q} + PR(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(P^2 - R^2) \quad (2.42)$$

$$\tau_z = I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + PQ(I_{xx} - I_{yy}) + RQI_{xz} \quad (2.43)$$

komponen di atas dapat dinotasikan menjadi $\tau_x = L$, $\tau_y = M$, dan $\tau_z = N$, sehingga dapat ditulis sebagai

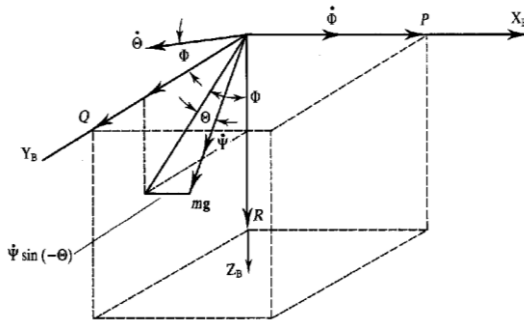
$$L = I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + QR(I_{zz} - I_{yy}) \quad (2.44)$$

$$M = I_{yy}\dot{Q} + PR(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(P^2 - R^2) \quad (2.45)$$

$$N = I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + PQ(I_{xx} - I_{yy}) + RQI_{xz} \quad (2.46)$$

2.4.3 Kinematika Sudut Terbang

Untuk analisa maneuver dan tanggapan dinamik pesawat terbang, digunakan tiga sudut gerak rotasi pesawat terbang, yaitu: *roll* (Φ), *pitch* (Θ) dan *yaw* (Ψ). Hubungan antara pergerakan Euler dan kecepatan angular pesawat yang ditunjukkan pada Gambar 2.11 sebagai berikut:



Gambar 2.11 Orientasi Angular dan Kecepatan dari Vektor Gravitasi g Relatif ke Sumbu Badan

Dari Gambar 2.11 di atas diperoleh

$$\begin{aligned} P &= \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \Theta \\ Q &= \dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi \\ R &= -\dot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dengan kata lain,

$$\dot{\Phi} = P + R \tan \Theta \cos \Phi + Q \tan \Theta \sin \Phi \quad (2.48)$$

$$\dot{\Theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi \quad (2.49)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{Q \sin \Phi}{\cos \Theta} + \frac{R \cos \Phi}{\sin \Theta} \quad (2.50)$$

2.5 Teori Matematika Sistem

Suatu pesawat dapat dilakukan pengendalian jika memenuhi 3 syarat yaitu:

- Telah dilakukan uji kestabilan pada pesawat
- Setelah dilakukan uji keterkontrolan, dengan hasil pesawat terkontrol
- Setelah dilakukan uji keteramatan, dengan hasil pesawat teramati

Jika pesawat tidak memenuhi ketiga syarat tersebut, maka tidak dapat dilakukan pengendalian terhadap pesawat.

2.5.1 Kestabilan

Diberikan suatu sistem persamaan linear *time invariant* sebagai berikut

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.51)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.52)$$

Pada persamaan (2.51) dapat ditentukan kestabilan suatu sistem tersebut melalui nilai karakteristik (λ_i). Rumus untuk mendapatkan nilai karakteristik tersebut adalah sebagai berikut:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.53)$$

Dengan:

λ : nilai karakteristik

A : matriks yang berordo $n \times n$ bernilai real.

I : matriks identitas

Teorema yang berkaitan dengan kestabilan untuk sistem linear *time-invariant* adalah:

”Diberikan persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$. Titik asal $x = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika bagian real dari $\lambda_i < 0$ untuk $i=1, \dots, k$. Titik asal adalah stabil jika bagian real $\lambda_i \leq 0$ untuk $i=1, \dots, k$ dan jika banyaknya vektor karakteristik yang bebas linear berkaitan dengan λ_i sebanyak rangkapnya λ_i ”.

Maka suatu sistem pada titik setimbangnya dapat dikatakan:

- a. stabil, jika bagian real dari nilai eigen bernilai non-positif atau $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$.
- b. stabil asimtotis, jika bagian real dari nilai eigen bernilai negatif ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$).

Sistem dapat dikatakan tidak stabil apabila terdapat nilai eigen yang bernilai positif atau $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.

2.5.2 Keterkontrolan

Suatu sistem linier (2.51) dikatakan terkontrol bila untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $u(t)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 kesebarang keadaan akhir $x(t_1) = x_1$ dengan waktu akhir t_1 hingga.

Suatu sistem linier dikatakan terkontrol jika memenuhi syarat perlu dan cukup sesuai dengan teorema dibawah ini.

Syarat Perlu dan cukup sistem (2.51) dapat dikatakan terkontrol adalah [7]:

1. $w(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau$ merupakan matriks non-singulir. Matriks non-singulir merupakan matriks yang determinannya tidak sama dengan 0, dengan kata lain terdapat nilai eigen yang berbeda, sehingga diperoleh rank pada $w(0, t_1)$ sebanyak n .

2. *Matriks* : $M_c = [B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B \mid \dots \mid A^{(n-1)}B]$ memiliki rank sama dengan n .

Sesuai dengan syarat perlu dan cukup di atas diketahui bahwa poin 1 berfungsi untuk menjamin keberadaan pengontrol $u(t)$ untuk mentransfer sembarang keadaan pada sistem awal ke sembarang keadaan pada sistem akhir berhingga (sistem diskrit). Poin ke-dua bertujuan untuk menjamin bahwa semua komponen sebanyak n dari kondisi awal sistem bisa dikontrol ke n komponen yang bersesuaian dari keadaan akhir pada sistem. Matriks keterkontrolan M_c dapat dinotasikan dengan (A, B) .

2.5.3 Keteramatan

Suatu sistem linier dikatakan teramati jika memenuhi syarat perlu dan cukup sesuai dengan teorema dibawah ini.

Syarat perlu dan cukup suatu sistem dapat dikatakan teramati adalah

1. Matriks $m(0, t)$ pada (2.10) merupakan matrik *non singular*.
2. Matriks keteramatan M_o sama dengan n .

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Matriks keteramatan M_o dapat dinotasikan dengan (C, A) .

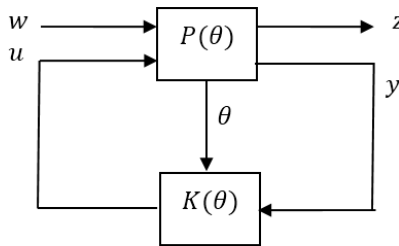
2.6 Sistem Kendali H_∞

Sistem kendali H_∞ merupakan salah satu sistem kendali modern yang diimplementasikan pada sistem persamaan keadaan yang digunakan untuk mendesain dinamika optimal regulator. Berdasarkan

sistem kontinu pada parameter vektor *time-varying* $\theta(t)$, model sistem persamaan linier dibangun oleh:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y &= C(\theta(t))x + D(\theta(t))u\end{aligned}\quad (2.55)$$

Dengan A, B, C, D merupakan matriks ruang keadaan yang bergantung pada $\theta(t)$, dengan u sebagai kontrol masukan. Semua merupakan vektor *time-varying* yang terdiri atas sistem keluaran, *exogenous inputs*, ataupun kombinasi dari keduanya. Sedangkan untuk *linier parameter varying* (LPV) dideskripsikan oleh fungsi tegas dari $\theta(t)$. Untuk sistem kontrol H_∞ diberikan sesuai dengan diagram blok sebagai berikut:



Gambar 2.12 Kontrol LPV dari sistem LPV

Dari Gambar 2.12 di atas diketahui bahwa terdapat dua masukan pada sistem, yaitu masukan eksogen w dan kendali masukan u . Dimana hasil dari pengontrol LPV ($K(\theta)$) memanfaatkan semua informasi yang terdapat pada $\theta(t)$ dari sistem dinamik. Kontrol ini memberikan *gain self-scheduled* yang halus dan otomatis dengan kepekaan terhadap parameter varying $\theta(t)$.

Persamaan sistem keadaan LPV *plants* $\mathbf{P}(\theta)$ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u \\
y &= C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u \\
z &= C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w + D_{22}(\theta)u \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Dengan A, B, C, D merupakan matriks keadaan yang bergantung pada $\theta(t)$, dengan $x \in \mathbf{R}^n$, w merupakan gangguan dengan $w \in \mathbf{R}^{m_1}$, u merupakan kontrol masukan dengan $u \in \mathbf{R}^{m_2}$, y merupakan *measured output* dengan $y \in \mathbf{R}^{p_2}$ dan z merupakan *performance output* dengan $z \in \mathbf{R}^{p_1}$.

Sedangkan untuk *plants* $P(\theta)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C_2(\theta) & D_{21}(\theta) & D_{22}(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Dengan kontroler LPV ($K(\theta)$) dibentuk oleh

$$\begin{aligned}
\dot{x}_K &= A_K x_K + B_K(\theta)y \\
u &= C_K(\theta)x_K + D_K(\theta)y \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Persamaan di atas menunjukkan performa H_∞ untuk sistem tertutup sesuai dengan Gambar 2.12. fungsi transfer dari w ke z pada sistem *close-loop* sebagai berikut:

$$T_{zw}(s) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.59)$$

Definisi 2.1. Sebuah matriks *polytope* digambarkan *convex hull* dari nilai yang terbatas oleh matriks N_i dengan dimensi yang sama sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
C_o\{N_i: i = 1, 2, 3, \dots, r\} &:= \{\sum_{i=1}^r \alpha_i N_i : \alpha_i \geq \\
&0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1\} \quad (2.60)
\end{aligned}$$

Dimana α_i merupakan rasio berat. Untuk persamaan (2.56), jika:

- A. Parameter bergantung *affine*, maka matriks ruang keadaan
 $A(\theta), B_1(\theta), B_2(\theta), C_1(\theta), C_2(\theta), D_{11}(\theta),$
 $D_{12}(\theta), D_{21}(\theta)$ dan $D_{22}(\theta)$ bergantung *affine* pada θ .
- B. Parameter *time-varying* θ yang berbeda berada pada *polytope* Θ , maka $\theta \in \Theta = C_o\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$.

Selanjutnya, sistem diasumsikan ke dalam bentuk *polytope* sebagai:

$$\begin{bmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C_2(\theta) & D_{21}(\theta) & D_{22}(\theta) \end{bmatrix} \in C_o \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{bmatrix} \right\}, i = 1, 2, \dots, r \quad (2.61)$$

Dengan $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{11i}, D_{12i}, D_{21i}, D_{22i}$ menunjukkan nilai dari $A(\theta), B_1(\theta), B_2(\theta), C_1(\theta), C_2(\theta), D_{11}(\theta), D_{12}(\theta), D_{21}(\theta)$ dan $D_{22}(\theta)$ dengan puncak $\theta = \theta_i$ pada parameter *polytope*.

Selanjutnya, untuk permasalahan control standar H_∞ bisa didefinisikan seperti mendapatkan kestabilan internal kontroler K yang membuat *close-loop* gain H_∞ dari w ke z lebih kecil dari γ . Jika fungsi transfer $T_{zw}(s)$ menyatakan fungsi transfer *close-loop* w ke z , maka dapat dirumuskan:

$$T_{zw}(s) < \gamma \quad (2.62)$$

Terdapat kontrol LPV pada persamaan (2.58) yang menjamin performa *quadratic* H_∞ sepanjang γ pada semua parameter trayektori, jika dan hanya jika terdapat dua matriks simetris $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ dan $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$ yang

memenuhi sistem *linier matrix inequalities* (LMI) $2r + 1$.

Jika θ merupakan *polytope* $C_o\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$, maka
 $\theta \in \Theta := \{\sum_{i=1}^r \alpha_i \theta_i; \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1\}$ (2.63)

Selanjutnya, matriks ruang keadaan dari kontroler LPV diberikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A_K(\theta(t)) & B_K(\theta(t)) \\ C_K(\theta(t)) & D_K(\theta(t)) \end{bmatrix} := \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \begin{bmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Dengan A_{Ki} , B_{Ki} , C_{Ki} dan D_{Ki} bisa diperoleh *off-line*, dan $A_K(\theta(t))$, $B_K(\theta(t))$, $C_K(\theta(t))$, $D_K(\theta(t))$ akan bergantung pada $\theta(t)$ di *real-time*.

BAB III

METODE PENELITIAN

Tahap – tahap yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Study Literatur

Kegiatan ini dilakukan dengan mencari literature ilmiah yang terkait dengan topik kontrol H_∞ dari buku, jurnal, artikel dan lain-lain. Bahan-bahan yang dikaji meliputi sistem sumbu dan *control surface*, pemodelan gerak pesawat, sistem kontrol optimal, pembuatan *source code* sistem kontrol H_∞ menggunakan Matlab, dan lain - lain.

2. Analisa Pemodelan Gerak Lateral-direksional LSU-05

Tahap kedua dari penelitian ini adalah dilakukan analisa terkait pemodelan gerak lateral-direksional pada pesawat LSU-05. Pada tahap ini dilakukan penurunan persamaan gerak pesawat, linierisasi dengan deret taylor dan pembentukan model gerak lateral-direksional. Pada tahap penurunan persamaan gerak pesawat, dilakukan analisis terhadap transformasi sumbu x - y - z , transformasi persamaan kecepatan sudut, persamaan yang diakibatkan gerak translasi dan rotasi. setelah ketiga tahap tersebut selesai, dilakukan penambahan matriks gangguan yang berdistribusi normal pada model gerak lateral-direksional pesawat LSU-05.

3. Perancangan Kontrol H_∞

Pada tahap ini dilakukan perancangan sistem kontrol H_∞ untuk kestabilan gerak *roll* pesawat LSU-05. Yang pertama dilakukan pada tahap ini dirancangnya *inner-loop linier quadratic optimal control* sehingga diperoleh *gain linier quadratic*. Pada tahap selanjutnya dirancang *outer-loop*

gain self-scheduled H_∞ robust control sehingga diperoleh nilai gain untuk control *linier parameter varying*.

4. Simulasi dan Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan simulasi tertutup dengan menggunakan Simulink pada MATLAB. Selanjutnya dilakukan penarikan kesimpulan respon simulasi gerak *roll* dengan acuan pengamatan sebagai berikut :

- Waktu tunda (*Delay Time* / t_d)
Merupakan waktu yang diperlukan respon untuk mencapai setengah harga akhir untuk pertama kali.
- *Rise Time* (Waktu naik / t_r)
Merupakan waktu yang diperlukan respon untuk naik dari 10 % sampai 90 %, 5 % sampai 95 %, maupun dari 0 % menuju 100 %.
- *Peak Time* (Waktu puncak / t_p)
Merupakan waktu yang dibutuhkan respon mencapai puncak lewatan yang pertama kali.
- *Maximum Overshoot* (Persen lewatan waktu / M_p)
Merupakan nilai puncak maksimum dari kurva respon yang diukur dari satu *setpoint*. Jika harga keadaan tunak, maka respon yang dihasilkan tidak akan sama dengan satu, sehingga bisa digunakan persen lewatan waktu. Parameter inii didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut :

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

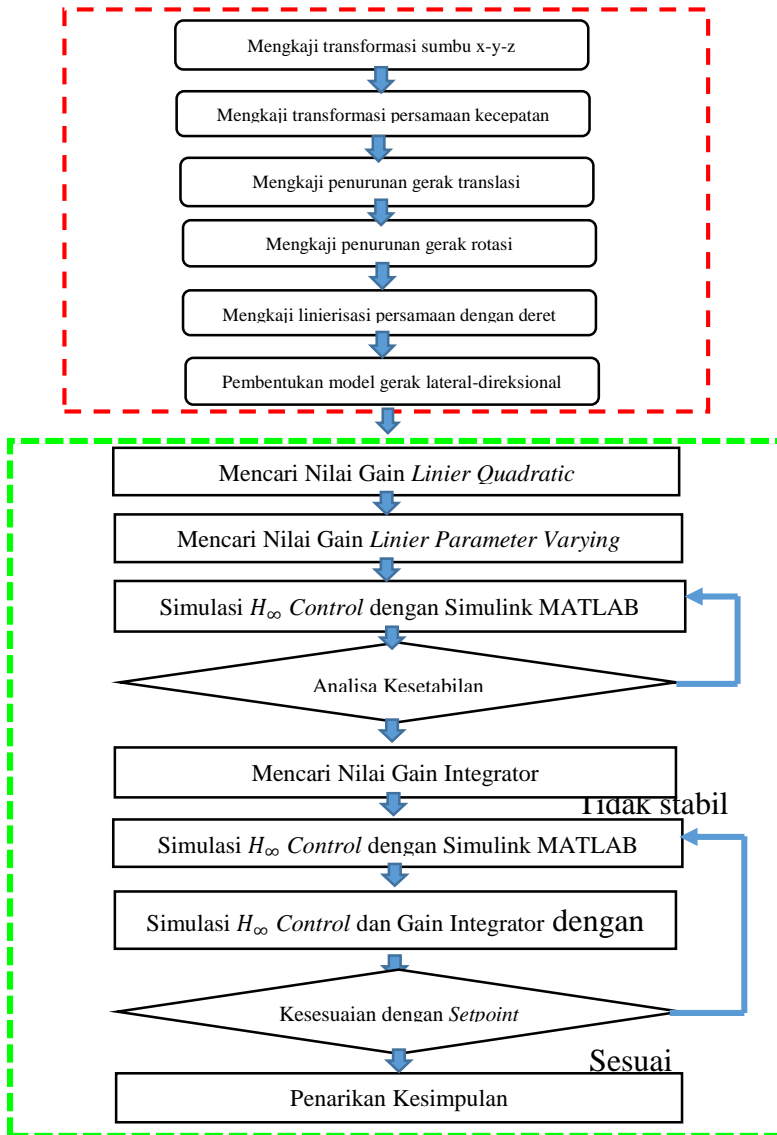
Besar M_p secara langsung menunjukkan kestabilan dari respon.

- *Settling Time* (Waktu penetapan / t_s)

Merupakan waktu yang diperlukan kurva respon untuk mencapai dan menetap dalam daerah di sekitar harga akhir yang nilainya ditentukan oleh persentase mutlak dari harga akhir (pada umumnya 10 % atau 20 %).

5. Penyusunan Laporan

Berikut merupakan gambar diagram alir metode penelitian:



Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN DAN ANALISIS

4.1 Linierisasi Persamaan Gerak Lateral direksional

Persamaan gerak pesawat terdiri atas persamaan gerak lateral-direksional dan persamaan gerak longitudinal. Dalam pengendalian geraknya dapat dilakukan secara terpisah. Pada persamaan gaya (2.25)-(2.27) terdiri atas persamaan gaya terhadap sumbu x, y dan z . Persamaan (2.44)-(2.46) menunjukkan persamaan momen terhadap sumbu x, y dan z , sedangkan persamaan (2.47)-(2.50) menunjukkan perubahan kecepatan sudut dan perubahan sudut terhadap sumbu badan. Persamaan ini difokuskan pada pengendalian gerak lateral-direksional.

Persamaan keadaan gerak lateral-direksional akan diturunkan dari persamaan yang terjadi pada sumbu- y yaitu pada persamaan (2.26), (2.44), (2.46) dan (2.47). Penurunan persamaan gerak lateral-direksional adalah sebagai berikut:

Gaya pada sumbu- y , momen *roll*, momen *yaw* dan kecepatan sudut pada sumbu- x yaitu:

$$Y = m(\ddot{V} + UR - PW - g \cos \Theta \sin \Phi) \quad (4.01)$$

$$L = I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + QR(I_{zz} - I_{yy}) \quad (4.02)$$

$$N = I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + PQ(I_{xx} - I_{yy}) + RQI_{xz} \quad (4.03)$$

$$\dot{\Phi} = P + R \tan \Theta \cos \Phi + Q \tan \Theta \sin \Phi \quad (4.04)$$

Persamaan di atas merupakan persamaan decoupled, maka diasumsikan bahwa $Q = 0$. Jika sumbu- x equilibrium sepanjang lintasan terbang dan tidak terjadi

slip samping selama equilibrium, maka dapat diasumsikan bahwa

$$\begin{aligned}
 U &= \Delta U = U_0 + u & P &= \Delta P = P_0 + p \\
 X &= \Delta X = X_0 + x & V &= \Delta V = V_0 + v \\
 Q &= \Delta Q = Q_0 + q & Y &= \Delta Y = Y_0 + y \\
 W &= \Delta W = W_0 + w & R &= \Delta R = R_0 + r \\
 Z &= \Delta Z = Z_0 + z & \Phi &= \Delta \Phi = \Phi_0 + \phi \\
 \Theta &= \Delta \Theta = \Theta_0 + \theta & \Psi &= \Delta \Psi = \Psi_0 + \psi \\
 L &= \Delta L = L_0 + l & N &= \Delta N = N_0 + n
 \end{aligned}$$

dengan $V_0 = W = 0$. Demikian halnya dengan turunannya yaitu $\dot{V} = \dot{v}$, $\dot{W} = 0$, dan $\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{u}$. Pada awalnya pesawat tidak mengalami percepatan, artinya nilai $P_0 = R_0 = 0$, maka nilai dari $P = p$ dan $R = r$. Turunan dari kecepatan sudutnya adalah $\dot{P} = \dot{p}$ dan $\dot{R} = \dot{r}$. Sehingga persamaan (4.01)-(4.03) dapat dituli menjadi

$$\begin{aligned}
 \Delta Y &= m(\dot{v} + U_0 r + ur - g \cos(\Theta_0 + \theta) \\
 &\quad \sin(\Phi_0 + \phi)) \quad (4.05)
 \end{aligned}$$

$$\Delta L = I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \quad (4.06)$$

$$\Delta N = I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} \quad (4.07)$$

Gaya kearah sumbu-y diuraikan kedalam bentuk perubahan yang dihasilkan oleh gangguan linier dan angular, sehingga persamaan ΔY , ΔL dan ΔN diasumsikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \Delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial Y}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial Y}{\partial p} dp + \frac{\partial Y}{\partial r} dr + \\
 &\quad \frac{\partial Y}{\partial \delta_A} d\delta_A + \frac{\partial Y}{\partial \delta_R} d\delta_R \quad (4.08)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial L}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial L}{\partial p} dp + \frac{\partial L}{\partial r} dr + \\
 &\quad \frac{\partial L}{\partial \delta_A} d\delta_A + \frac{\partial L}{\partial \delta_R} d\delta_R \quad (4.09)
 \end{aligned}$$

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial N}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial N}{\partial p} dp + \frac{\partial N}{\partial r} dr + \frac{\partial N}{\partial \delta_A} d\delta_A + \frac{\partial N}{\partial \delta_R} d\delta_R \quad (4.10)$$

Jika turunan parsial di atas diasumsikan linier selama terjadi gangguan, maka tanda differensial (d) dapat diubah menjadi nilai pada saat kondisi tersebut, dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial Y}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial Y}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial Y}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial Y}{\partial \delta_A} \Delta \delta_A + \frac{\partial Y}{\partial \delta_R} \Delta \delta_R \quad (4.11)$$

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial L}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_A} \Delta \delta_A + \frac{\partial L}{\partial \delta_R} \Delta \delta_R \quad (4.12)$$

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial N}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial N}{\partial \delta_A} \Delta \delta_A + \frac{\partial N}{\partial \delta_R} \Delta \delta_R \quad (4.13)$$

Kalikan kedua ruas dengan $\left(\frac{1}{qS}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \left(p \frac{b}{2U_0}\right)} \Delta p + \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \left(r \frac{b}{2U_0}\right)} r + \\ & \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{1}{qS} \frac{\partial F_Y}{\partial \delta_R} \delta_R = \frac{1}{qS} m \left(\left(\frac{\dot{v}}{U_0} \right) U_0 + \right. \\ & \left. U_0 r - g \cos \Theta_0 \phi \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

jika diasumsikan:

$$\begin{aligned} y_\beta &= \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \beta}, \quad y_p = \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \left(p \frac{b}{2U_0}\right)}, \quad y_r = \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \left(r \frac{b}{2U_0}\right)} \\ y_\Phi &= \frac{mg}{qS} \cos \Theta, \quad y_{\delta_A} = \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \delta_A}, \quad y_{\delta_R} = \frac{1}{qS} \frac{\partial Y}{\partial \delta_R} \end{aligned}$$

maka,

$$y_\beta \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} y_p \Delta p + \frac{b}{2U_0} y_r \Delta r + y_\Phi \Delta\Phi + y_{\delta_A} \delta_A + y_{\delta_R} \delta_R = \frac{mU_0}{qS} \dot{\beta} + \frac{mU_0}{qS} r - \frac{mg}{qS} \cos \Theta_0 \phi \quad (4.15)$$

$$\frac{mU_0}{qS} \dot{\beta} = y_\beta \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} y_p \Delta p - \left(\frac{mU_0}{qS} - \frac{b}{2U_0} y_r \right) \Delta r + y_\Phi \Delta\Phi + y_{\delta_A} \delta_A + y_{\delta_R} \delta_R + \frac{mg}{qS} \cos \Theta_0 \phi \quad (4.16)$$

Untuk persamaan momen

$$\Delta L = I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r}$$

$$\Delta N = I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p}$$

atau bisa ditulis

$$\dot{p} = \frac{(\Delta L + I_{xz} \dot{r})}{I_{xx}} \quad (4.17)$$

$$\dot{r} = \frac{\Delta N + I_{xz} \dot{p}}{I_{zz}} \quad (4.18)$$

Substitusi persamaan (4.17) ke persamaan (4.18) dan (4.18) ke persamaan (4.17), sehingga diperoleh

$$\dot{p} = \frac{I_{zz} \Delta L + I_{xz} \Delta N}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (4.19)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xx} \Delta N + I_{xz} \Delta L}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (4.20)$$

Untuk turunan parsial dari momen yaitu

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial \beta} \Delta\beta + \frac{\partial L}{\partial \Phi} \Delta\Phi + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_A} \Delta\delta_A + \frac{\partial L}{\partial \delta_R} \Delta\delta_R \quad (4.21)$$

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial \beta} \Delta\beta + \frac{\partial N}{\partial \Phi} \Delta\Phi + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial N}{\partial \delta_A} \Delta\delta_A + \frac{\partial N}{\partial \delta_R} \Delta\delta_R \quad (4.22)$$

Substitusi persamaan (4.21) dan (4.22) ke persamaan (4.17) dan (4.18), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{1}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \left(I_{zz} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial L}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_A} \Delta \delta_A + \frac{\partial L}{\partial \delta_R} \Delta \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{\partial N}{\partial \beta} \Delta \beta + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial N}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial N}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \Big) \\
\dot{r} &= \frac{1}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \left(I_{xx} \left(\frac{\partial N}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial N}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial N}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial N}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial N}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \Delta \beta + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial L}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_A} \Delta \delta_A + \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial L}{\partial \delta_R} \Delta \delta_R \right) \right)
\end{aligned}$$

Dengan $\frac{\partial l}{\partial \Phi} = \frac{\partial l}{\partial \Psi} = \frac{\partial n}{\partial \Phi} = \frac{\partial n}{\partial \Psi} = 0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{1}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \left(I_{zz} \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial l}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial l}{\partial r} \Delta r + \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial l}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{\partial n}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial n}{\partial p} \Delta p + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial n}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial n}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \Big) \\
(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2) \dot{p} &= \left(I_{zz} \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial l}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial l}{\partial r} \Delta r + \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial l}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{\partial n}{\partial \beta} \Delta \beta + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial n}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial n}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial n}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \Big)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\left(\frac{1}{qSb}\right)$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qSb} \dot{p} = & I_{zz} \left(\frac{1}{qSb} \frac{\partial l}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qSb} \frac{\partial l}{\partial \left(p \frac{b}{2U_0}\right)} \Delta p + \right. \\
 & \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qSb} \frac{\partial l}{\partial \left(r \frac{b}{2U_0}\right)} \Delta r + \frac{1}{qSb} \frac{\partial l}{\partial \delta_A} \delta_A + \\
 & \left. \frac{1}{qSb} \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{1}{qSb} \frac{\partial n}{\partial \beta} \Delta \beta + \right. \\
 & \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qSb} \frac{\partial n}{\partial \left(p \frac{b}{2U_0}\right)} \Delta p + \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qSb} \frac{\partial n}{\partial \left(r \frac{b}{2U_0}\right)} \Delta r + \\
 & \left. \frac{1}{qSb} \frac{\partial n}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{1}{qSb} \frac{\partial n}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & \frac{1}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \left(I_{xx} \left(\frac{\partial n}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial n}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r + \right. \right. \\
 & \left. \frac{\partial n}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial n}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial l}{\partial p} \Delta p + \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial l}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial l}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \right) \\
 I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2 \dot{r} = & \left(I_{xx} \left(\frac{\partial n}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial n}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r + \right. \right. \\
 & \left. \frac{\partial n}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial n}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xz} \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial l}{\partial p} \Delta p + \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial l}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial l}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \right)
 \end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\left(\frac{1}{qsb}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qsb} \dot{r} = & I_{xz} \left(\frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)} \Delta p + \right. \\
 & \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)} \Delta r + \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \delta_A} \delta_A + \\
 & \left. \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \delta_R \right) + I_{xx} \left(\frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \beta} \Delta \beta + \right. \\
 & \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)} \Delta p + \frac{b}{2U_0} \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)} \Delta r + \\
 & \left. \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \delta_A} \delta_A + \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \delta_R} \delta_R \right) \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Jika diasumsikan:

$$\begin{aligned}
 I_\beta &= \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \beta}, \quad I_p = \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)}, \quad I_r = \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)} \\
 I_{\delta_A} &= \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \delta_A}, \quad I_{\delta_R} = \frac{1}{qsb} \frac{\partial l}{\partial \delta_R} \\
 n_\beta &= \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \beta}, \quad n_p = \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)}, \quad n_r = \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \left(\frac{b}{2U_0}\right)} \\
 n_{\delta_A} &= \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \delta_A}, \quad n_{\delta_R} = \frac{1}{qsb} \frac{\partial n}{\partial \delta_R}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qsb} \dot{p} = & I_{zz} \left(I_\beta \Delta \beta + \frac{b}{2U_0} I_p \Delta p + \frac{b}{2U_0} I_r \Delta r + \right. \\
 & I_{\delta_A} \delta_A + I_{\delta_R} \delta_R \left. \right) + I_{xz} \left(n_\beta \Delta \beta + \frac{b}{2U_0} n_p \Delta p + \right. \\
 & \left. \frac{b}{2U_0} n_r \Delta r + n_{\delta_A} \delta_A + n_{\delta_R} \delta_R \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qSb} \dot{p} = & \left(I_{zz} I_{\beta} \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} I_{zz} I_p \Delta p + \right. \\
& \left. \frac{b}{2U_0} I_{zz} I_r \Delta r + I_{zz} I_{\delta_A} \delta_A + I_{zz} I_{\delta_R} \delta_R \right) + \\
& \left(I_{xz} n_{\beta} \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} I_{xz} n_p \Delta p + \frac{b}{2U_0} I_{xz} n_r \Delta r + \right. \\
& \left. I_{xz} n_{\delta_A} \delta_A + I_{xz} n_{\delta_R} \delta_R \right) \\
\frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qSb} \dot{p} = & (I_{zz} I_{\beta} + I_{xz} n_{\beta}) \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} (I_{zz} I_p + \\
& I_{xz} n_p) \Delta p + \frac{b}{2U_0} (I_{zz} I_r + I_{xz} n_r) \Delta r + \\
& (I_{zz} I_{\delta_A} + I_{xz} n_{\delta_A}) \delta_A + (I_{zz} I_{\delta_R} + I_{xz} n_{\delta_R}) \delta_R
\end{aligned} \tag{4.25}$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qSb} \dot{r} = & I_{xz} \left(I_{\beta} \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} I_p \Delta p + \frac{b}{2U_0} I_r \Delta r + \right. \\
& \left. I_{\delta_A} \delta_A + I_{\delta_R} \delta_R \right) + I_{xx} \left(n_{\beta} \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} n_p \Delta p + \right. \\
& \left. \frac{b}{2U_0} n_r \Delta r + n_{\delta_A} \delta_A + n_{\delta_R} \delta_R \right) \\
\frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qSb} \dot{r} = & \left(I_{xz} I_{\beta} \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} I_{xz} I_p \Delta p + \right. \\
& \left. \frac{b}{2U_0} I_{xz} I_r \Delta r + I_{xz} I_{\delta_A} \delta_A + I_{xz} I_{\delta_R} \delta_R \right) + \\
& \left(I_{xx} n_{\beta} \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} I_{xx} n_p \Delta p + \frac{b}{2U_0} I_{xx} n_r \Delta r + \right. \\
& \left. I_{xx} n_{\delta_A} \delta_A + I_{xx} n_{\delta_R} \delta_R \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)}{qSb} \dot{r} = & (I_{xz} I_\beta + I_{xx} n_\beta) \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} (I_{xz} I_p + \\
& I_{xx} n_p) \Delta p + \frac{b}{2U_0} (I_{xz} I_r + I_{xx} n_r) \Delta r + \\
& (I_{xz} I_{\delta_A} + I_{xx} n_{\delta_A}) \delta_A + (I_{xz} I_{\delta_R} + I_{xx} n_{\delta_R}) \delta_R
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Hubungan sudut:

$$\begin{aligned}
\Phi &= P + R \tan \Theta \cos \Phi + Q \tan \Theta \sin \Phi \\
\dot{\Phi} &= p + r \tan \Theta
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Jika persamaan (4.16), (4.25), (4.26) dan (4.27) ditulis kembali

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} = \frac{qS}{mU_0} \Big(& y_\beta \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} y_p \Delta p + \frac{b}{2U_0} y_r \Delta r + y_\Phi \Delta\Phi + \\
& y_{\delta_A} \delta_A + y_{\delta_R} \delta_R - \frac{mU_0}{qS} \Delta r + \frac{mg}{qS} \cos \Theta_0 \Delta\phi \Big)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} = \frac{qSb}{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)} \Big(& (I_{zz} I_\beta + I_{xz} n_\beta) \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} (I_{zz} I_p + \\
& I_{xz} n_p) \Delta p + \frac{b}{2U_0} (I_{zz} I_r + I_{xz} n_r) \Delta r + \\
& (I_{zz} I_{\delta_A} + I_{xz} n_{\delta_A}) \delta_A + (I_{zz} I_{\delta_R} + I_{xz} n_{\delta_R}) \delta_R \Big)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} = \frac{qSb}{(I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)} \Big(& (I_{xz} I_\beta + I_{xx} n_\beta) \Delta\beta + \frac{b}{2U_0} (I_{xz} I_p + \\
& I_{xx} n_p) \Delta p + \frac{b}{2U_0} (I_{xz} I_r + I_{xx} n_r) \Delta r +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left((I_{xz}I_{\delta_A} + I_{xx}n_{\delta_A})\delta_A + (I_{xz}I_{\delta_R} + \right. \\ & \left. I_{xx}n_{\delta_R})\delta_R \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\Phi = \Delta p + \Delta r \tan \Theta \quad (4.31)$$

Jika diasumsikan:

$$a_1 = \frac{qS}{mU_0} y_\beta, \quad a_2 = \frac{bqS}{2mU_0^2} y_p, \quad a_3 = \frac{bqS}{2mU_0^2} y_r - 1,$$

$$a_4 = y_\phi + \frac{g}{U_0} \cos \Theta_0, \quad a_5 = \frac{qS}{mU_0} y_{\delta_A}, \quad a_6 = \frac{qS}{mU_0} y_{\delta_R}$$

$$b_1 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left((I_{zz}I_\beta + I_{xz}n_\beta) \right),$$

$$b_2 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left(\frac{b}{2U_0} (I_{zz}I_p + I_{xz}n_p) \right),$$

$$b_3 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left(\frac{b}{2U_0} (I_{zz}I_r + I_{xz}n_r) \right),$$

$$b_4 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} (I_{zz}I_{\delta_A} + I_{xz}n_{\delta_A})$$

$$b_5 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left((I_{zz}I_{\delta_R} + I_{xz}n_{\delta_R}) \right)$$

$$c_1 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} (I_{xz}I_\beta + I_{xx}n_\beta),$$

$$c_2 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left(\frac{b}{2U_0} (I_{xz}I_p + I_{xx}n_p) \right),$$

$$c_3 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left(\frac{b}{2U_0} (I_{xz}I_r + I_{xx}n_r) \right),$$

$$c_4 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left((I_{xz}I_{\delta_A} + I_{xx}n_{\delta_A}) \right),$$

$$c_5 = \frac{qSb}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \left((I_{xz}I_{\delta_R} + I_{xx}n_{\delta_R}) \right)$$

Sehingga persamaan (4.28)-(4.31) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\beta} = (a_1\Delta\beta + a_2\Delta p + a_3\Delta r + a_4\Delta\Phi + a_5\delta_A + a_6\delta_R) \quad (4.32)$$

$$\dot{p} = (b_1\Delta\beta + b_2\Delta p + b_3\Delta r + b_4\delta_A + b_5\delta_R) \quad (4.33)$$

$$\dot{r} = (c_1\Delta\beta + c_2\Delta p + c_3\Delta r + c_4\delta_A + c_5\delta_R) \quad (4.34)$$

$$\dot{\Phi} = \Delta p + \Delta r \tan \Theta \quad (4.35)$$

Persamaan linier (4.32)-(4.35) dapat ditulis dalam matriks ruang keadaan $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, dimana A merupakan matriks keadaan dan B merupakan matriks input sehingga matriks persamaan ruang keadaannya diperoleh sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 \\ c_4 & c_5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_R \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Pada persamaan (4.36) dapat diketahui bahwa variable keadaan pada gerak lateral direksional pesawat terdiri atas sudut selip (β), kecepatan *roll* (p), kecepatan *yaw* (r), dan sudut *roll* (φ). Input dari sistem berupa defleksi *aileron*s (δ_A) dan defleksi *rudder* (δ_R).

Pada analisa kestabilan gerak lateral-direksional ini, diharapkan *output* yang terjadi ada empat, yaitu β, p, r , dan φ . Berikut ini matriks *output* dari sistem:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Pada saat LSU-05 terbang di udara, LSU-05 menerima gangguan yang bersifat acak, seperti angin, udara maupun cuaca. Oleh karena itu, pada model persamaan gerak lateral-direksional di atas ditambahkan matriks gangguan dengan memberikan tambahan variabel sistem sebagai berikut:

$$\dot{H} = -p + U_o \Phi \quad (4.38)$$

$$\dot{\delta}_A = -20\delta_A + 20\delta_A \quad (4.39)$$

$$\dot{\delta}_R = -2\delta_R + 2\delta_R \quad (4.40)$$

$$\dot{\varepsilon}_H = -H + r_{\Delta H} \quad (4.41)$$

$$\dot{\varepsilon}_\beta = -\beta \quad (4.42)$$

Sehingga model sistem secara keseluruhan dapat ditulis kedalam matriks ruang keadaan sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gr(t) \quad (4.43)$$

$$y(t) = Cx(t) + Fr(t) \quad (4.44)$$

$$z(t) = Hx(t) \quad (4.45)$$

dengan,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{H} \\ \dot{\delta}_A \\ \dot{\delta}_R \\ \dot{\varepsilon}_H \\ \dot{\varepsilon}_\beta \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \\ \Delta H \\ \delta_A \\ \delta_R \\ \varepsilon_H \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_R \end{bmatrix}; r = \begin{bmatrix} r_{\Delta H} \\ \Delta r_\phi \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta\phi \\ e_H \\ \varepsilon_H \\ e_\beta \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} \Delta H \\ \Delta\phi \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -U_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $z(t)$ merupakan hasil keluaran sistem. Selanjutnya diperoleh nilai matriks A, B, C, F, G dan H pada matriks lateral-direksional sebagai berikut;

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

4.2 Uji Kestabilan, Keterkontrolan, serta Keteramatan

Pada sub bab ini akan dilakukan uji kestabilan, keterkontrolan dan keteramatan sistem sesuai dengan persamaan (4.43). Hal ini bertujuan untuk mencari tahu apakah sistem stabil, terkontrol dan teramati. Apabila sistem stabil maka pada saat sistem diberikan *setpoint*, *output* yang dihasilkan oleh sistem akan sesuai dengan *setpoint*. Apabila sistem terkontrol, maka sistem tersebut dapat dipasang pengontrol dengan tujuan untuk mendapatkan nilai karakteristik respon sistem yang lebih baik. Apabila sistem teramati maka nilai awal pada sistem dapat dibawa sebagai acuan nilai akhir sistem.

4.2.1. Uji Kestabilan

Kestabilan yang terdapat pada sistem diuji dengan mencari nilai karakteristik sistem. Jika semua bagian real dari karakteristik nilai eigen bernilai negatif, maka sistem mengalami kestabilan dinamik.

Selanjutnya akan dicari nilai karakteristik dari sistem dengan persamaan (4.43) sebagai berikut:

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \\
& \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1827 & 0 & 0 & -0,24719 & 0 & 0 \\ -21,063 & -16,055 & 0,87229 & 0 & 0 & -36,263 & -688,44 & 0 & 0 \\ 24,512 & -16,651 & -3,5379 & 0 & 0 & -0,67252 & -67,983 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0026 & -0,029766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -U_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\
& \begin{bmatrix} \lambda + 2,3817 & 0 & 1,0019 & -2,1827 & 0 & 0 & 0,24719 & 0 & 0 \\ 21,063 & \lambda + 16,055 & -0,87229 & 0 & 0 & 36,263 & 688,44 & 0 & 0 \\ -24,512 & 16,651 & \lambda + 3,5379 & 0 & 0 & 0,67252 & 67,983 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0026 & 0,029766 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & U_o & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan bantuan piranti MATLAB, diperoleh karakteristik nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = -16,8775$$

$$\lambda_5 = -2,4624 - 7,0408i$$

$$\lambda_6 = -2,4624 + 7,0408i$$

$$\lambda_7 = -0,1751$$

$$\lambda_8 = -20$$

$$\lambda_9 = -2 \quad (4.52)$$

Dikarenakan semua bagian real dari karakteristik nilai eigen pada persamaan (4.52) bernilai ≤ 0 , maka sistem pada persamaan (4.43) stabil biasa.

4.2.2. Uji Keterkontrolan

Matriks keterkontrolan pada sistem (4.43)-(4.44) diberikan oleh persamaan berikut:

$$M_c =$$

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B \quad A^6B \quad A^7B \quad A^8B]$$

Dengan,

$$A = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1827 & 0 & 0 & -0,24719 & 0 & 0 \\ -21,063 & -16,055 & 0,87229 & 0 & 0 & -36,263 & -688,44 & 0 & 0 \\ 24,512 & -16,651 & -3,5379 & 0 & 0 & -0,67252 & -67,983 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0026 & -0,029766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -U_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan piranti MATLAB, diperoleh nilai rank atas matriks M_c sebanyak 9. Sehingga, sistem persamaan (4.43)-(4.44) dapat dikatakan terkontrol.

4.2.3. Uji Keteramatan

Matriks keterkontrolan pada sistem (4.43)-(4.45) diberikan oleh persamaan berikut:

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \end{bmatrix}$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1827 & 0 & 0 & -0,24719 & 0 & 0 \\ -21,063 & -16,055 & 0,87229 & 0 & 0 & -36,263 & -688,44 & 0 & 0 \\ 24,512 & -16,651 & -3,5379 & 0 & 0 & -0,67252 & -67,983 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0026 & -0,029766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -U_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan piranti MATLAB, diperoleh nilai rank atas matriks M_0 sebanyak 9. Sehingga, sistem persamaan (4.43)-(4.45) dapat dikatakan teramati.

Dengan sistem yang teramati, maka gangguan yang terjadi pada keluaran sistem dapat diperkecil.

4.3 Desain Kontrol H_∞

Pada sub bab ini, akan dibahas terkait perancangan control H_∞ untuk kestabilan sudut *roll* pada LSU-05. H_∞ merupakan suatu sistem kontrol yang tersusun atas gain *feedback* sistem. Pada tugas akhir ini, sistem pada gerak lateral-direksional LSU-05 diberikan kendali terhadap output sistem. Oleh karena itu, tahap pertama dari sub bab ini adalah penentuan gain *Linier Quadratic*. Tahap kedua dari sub bab ini adalah penentuan gain *self-scheduled H_∞ Robust Control*, dimana dalam tahap ini ditentukan nilai gain LPV agar *output* dari sistem sesuai dengan *setpoint* yang telah ditentukan.

4.3.1 *Linear Quadratic Optimal Control*

Pada langkah ini akan diselidiki Gain Regulator LQ dengan karakteristik stabil pada lup tertutup. Nilai gain LQ diperoleh dengan menerapkan hukum kendali dari sebuah sistem sebagai berikut:

$$u = -K_{LQ}y \quad (4.53)$$

dengan K_{LQ} merupakan nilai gain *feedback linear quadratic*, dimana

$$K_{LQ} = B^T P_c C^T \quad (4.54)$$

Dengan P_c merupakan penyelesaian dari aljabar ricati sebagai berikut:

$$A^T P_c + P_c A + Q_c - P_c B R_c^{-1} B^T P_c = 0 \quad (4.55)$$

Dalam penyelesaian Aljabar Riccati tersebut, dibutuhkan penentuan nilai Q_c dan R_c terlebih dahulu, dengan Q_c adalah matriks bobot variabel sistem yang bersifat simetri dan semi definit positif, sedangkan R_c merupakan matriks bobot dari nilai masukan sistem yang

bersifat simetri serta merupakan matriks definit positif. Nilai Q_c dan R_c diperoleh dengan metode *Trial and error*. Semakin kecil nilai R_c , maka nilai Q_c akan semakin besar sehingga diperoleh nilai gain K_{LQ} yang semakin besar.

Berikut merupakan tahapan yang dilakukan dalam penentuan nilai gain K_{LQ} :

1. Menentukan matriks R_c dan Q_c
2. Dipilih nilai R_c terlebih dahulu dan penentuan Q_c
3. Mencari nilai P_c dengan menggunakan *toolbox* pada piranti MATLAB
4. Mencari nilai gain K_{LQ}
5. Simulasi sistem dengan menggunakan piranti MATLAB.
6. Analisa karakteristik sampai diperoleh yang optimal, yaitu sistem yang memiliki waktu stabil tercepat dan *overshoot* terpendek.

Matriks Q_c dan R_c diperoleh dengan menggunakan metode *trial and error*, dengan menjaga nilai matriks Q_c lebih kecil dari matriks $C^T C$. Sehingga diperoleh matriks Q_c dan R_c sebagai berikut:

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,125 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} 3286,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3286,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0010 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Sehingga diperoleh nilai matriks P_c sebagai berikut:

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.0199 & -0.0004 & -0.0022 & -0.0395 & -0.0038 & 0.0003 & 0.0206 & 0.0025 & -0.0409 \\ -0.0004 & 0.0022 & -0.0001 & 0.0238 & 0.0031 & -0.0008 & -0.0155 & -0.01023 & -0.0003 \\ -0.0022 & -0.0001 & 0.0005 & 0.0047 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0044 & -0.0000 & 0.00085 \\ -0.0395 & 0.0238 & 0.0047 & 1,7973 & 0,2537 & -0,0090 & -0,2677 & -0,1966 & 0,1416 \\ -0.0038 & 0.0031 & 0.0002 & 0,2537 & 0,0565 & -0,0011 & -0,0271 & -0,0478 & 0,0067 \\ 0.0003 & -0.0008 & 0.0000 & -0.0090 & -0.0011 & 0.0005 & 0.0106 & 0.0009 & 0.0002 \\ 0.0206 & -0.0155 & -0.0044 & -0.2677 & -0.0271 & 0.0106 & 0.3914 & 0.0190 & -0.0863 \\ 0.0025 & -0.0023 & -0.0000 & -0,1966 & -0,0478 & 0.0009 & 0.0190 & 0,1660 & -0.0028 \\ -0,0409 & -0.0003 & 0.0085 & 0.1416 & 0.0067 & 0.0002 & -0.0863 & -0.0028 & 0,3300 \end{bmatrix}$$

Nilai matriks P_c dapat diterapkan apabila $P_c = P_c^T$.

Sehingga diperoleh nilai gain K_{LQ} sebagai berikut:

$$K_{LQ} = \begin{bmatrix} -0.0153 & -0.1796 & 0.0228 & 0.0173 & -0.0057 & 0.0038 \\ -0.0310 & -0,5354 & 0,0543 & 0.0379 & -0.0413 & -0.1727 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Kendali LQ dapat diterapkan pada sistem jika $[A - BK_{LQ}C]$ bersifat stabil. Dilakukan uji kestabilan pada $[A - BK_{LQ}C]$ sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} \lambda I - [A - BK_{LQ}C] \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1826 & 0 & 0 & -0,2472 & 0 & 0 \\ -21,0694 & -16,0572 & 0,8724 & 0 & 0 & -36,2629 & -688,4458 & 0 & 0 \\ 24,5084 & -16,6513 & -3,5384 & 0 & 0 & -0,6736 & -67,9827 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 27,78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1135 & 0,3068 & 0 & 3,5918 & 0,4569 & -20 & 0 & -0,3453 & 0,0759 \\ -0,0825 & 0,0620 & 0 & 1,0708 & 0,1086 & 0 & -2 & -0,0759 & 0,3453 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan piranti MATLAB diperoleh nilai eigen persamaan di atas sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -18,0902 + 1,3375i$$

$$\lambda_2 = -18,0902 - 1,3375i$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= -1,6893 - 8,2479i \\
\lambda_4 &= -1,6893 + 8,2479i \\
\lambda_5 &= -0,3723 - 4,1660i \\
\lambda_6 &= -0,3723 + 4,1660i \\
\lambda_7 &= -0,0063 \\
\lambda_8 &= -0,9810 \\
\lambda_9 &= -2,6864
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Dikarenakan semua nilai eigen pada (4.58) bagian real bernilai negatif, maka sistem tersebut bersifat stabil. oleh karena itu nilai gain *feedback* K_{LQ} dapat digunakan.

4.3.2 Linear Parameter Varying Control

Pada tahap ini akan ditentukan nilai gain *feedback* kontrol LPV menggunakan sistem *close-loop* dengan kontroler *LQ output feedback inner-loop* diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\dot{x} = A_c(\theta(t))x + B_1(\theta(t))w + B(\theta(t))u \tag{4.59}$$

$$z = Hx \tag{4.60}$$

$$y = Cx \tag{4.61}$$

Dengan B_1 merupakan matriks gangguan yang terjadi pada sistem. Gangguan yang diberikan pada tugas akhir ini terdiri atas enam variabel vektor gangguan yaitu $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ dan ξ_6 . Dimana ξ_1 merupakan gangguan yang terjadi pada sudut yang terbentuk atau dibentuk oleh pesawat dengan satuan rad, ξ_2 merupakan gangguan yang terjadi pada kecepatan sudut pesawat, ξ_3 merupakan gangguan yang terjadi pada ketinggian pesawat, ξ_4 merupakan gangguan yang terjadi pada defleksi aileron, ξ_5 merupakan gangguan yang terjadi pada defleksi *throttle* dan ξ_6 merupakan gangguan yang terjadi pada kecepatan pesawat.

Nilai dari matriks B_1 disajikan sebagai berikut:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

dan untuk matriks A_c diperoleh sebagai berikut

$$A_c = A(\theta(t)) - B(\theta(t))K_{LQ}C \quad (4.63)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1826 & 0 & 0 & -0,2472 & 0 & 0 \\ -21,0694 & -16,0572 & 0,8724 & 0 & 0 & -36,2629 & -688,4458 & 0 & 0 \\ 24,5084 & -16,6513 & -3,5384 & 0 & 0 & -0,6736 & -67,9827 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 27,78 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0759 \\ -0,1135 & 0,3068 & 0 & 3,5918 & 0,4569 & -20 & 0 & -0,3453 & 0 \\ -0,0825 & 0,0620 & 0 & 1,0708 & 0,1086 & 0 & -2 & -0,0759 & 0,3453 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai gain LPV diperoleh dengan menerapkan hukum kendali dari sebuah sistem sebagai berikut:

$$u = -K_{LPV}y \quad (4.64)$$

Sistem $P(\theta)$ dapat ditulis sebagai

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c(\theta) & B_1(\theta) & B(\theta) \\ H(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C(\theta) & D_{21}(\theta) & D_{22}(\theta) \end{bmatrix}$$

dimana,

$$A_c(\theta) = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1826 & 0 & 0 & -0,2472 & 0 & 0 \\ -21,0694 & -16,0572 & 0,8724 & 0 & 0 & -36,2629 & -688,4458 & 0 & 0 \\ 24,5084 & -16,6513 & -3,5384 & 0 & 0 & -0,6736 & -67,9827 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 27,78 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0759 \\ -0,1135 & 0,3068 & 0 & 3,5918 & 0,4569 & -20 & 0 & -0,3453 & 0 \\ -0,0825 & 0,0620 & 0 & 1,0708 & 0,1086 & 0 & -2 & -0,0759 & 0,3453 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan K_{LPV} control LPV diperoleh dari persamaan

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K(\theta)x_K + B_K(\theta)y \\ u = C_K(\theta)x_K + D_K(\theta)y \end{cases}$$

Dimana,

$$A_K = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1826 & 0 & 0 & -0,2472 & 0 & 0 \\ -21,0694 & -16,0572 & 0,8724 & 0 & 0 & -36,2629 & -688,4458 & 0 & 0 \\ 24,5084 & -16,6513 & -3,5384 & 0 & 0 & -0,6736 & -67,9827 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 27,78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1135 & 0,3068 & 0 & 3,5918 & 0,4569 & -20 & 0 & -0,3453 & 0,0759 \\ -0,0825 & 0,0620 & 0 & 1,0708 & 0,1086 & 0 & -2 & -0,0759 & 0,3453 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pencarian nilai gain K_{LPV} dilakukan dengan menggunakan persamaan Aljabar Riccati sebagai berikut:

$$A_c^T P_\infty + P_\infty A_c - P_\infty B_K R_K^{-1} B_K^T P_\infty + Q_K = 0$$

Dengan menggunakan metode *trial and error* diperoleh nilai R_K dan Q_K sebagai berikut:

$$R_K = \begin{bmatrix} 33,1933 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33,1933 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0101 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0101 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0101 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0101 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0101 \end{bmatrix}$$

$$Q_K = \begin{bmatrix} 0,0202 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0101 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0202 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0101 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0101 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan piranti MATLAB diperoleh nilai dari matriks P_∞ sebagai berikut:

$$P_\infty = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 21 & -0,0142 & -1,229 & -22 & -2,86 & -0,002 & 2,2 & 1,62 & -17 \\ -0,014 & 0,365 & -0,69 & 4,21 & 0,62 & -0,024 & -0,44 & -0,37 & -0,025 \\ -1,229 & -0,69 & 0,12 & -0,56 & -0,12 & 0,001 & -0,3 & -0,08 & 1,16 \\ -22 & 4,21 & -0,56 & 1413 & 239 & -0,28 & -5,92 & -145 & 21 \\ -2,86 & 0,62 & -0,12 & 239 & 65 & -0,04 & -0,8 & -42 & 2,3 \\ -0,002 & -0,024 & 0,001 & -0,28 & -0,04 & 0,003 & 0,06 & 0,02 & 0,005 \\ 2,2 & -0,44 & -0,3 & -5,92 & -0,8 & 0,06 & 2,44 & 0,46 & -2,47 \\ 1,62 & -0,37 & 0,08 & -145 & -42 & 0,02 & 0,46 & 170 & -1,27 \\ -17 & -0,025 & 1,16 & 21 & 2,3 & 0,005 & -2,47 & -1,27 & 158 \end{bmatrix}$$

Nilai matriks P_∞ dapat diterapkan apabila nilai $P_\infty = P_\infty^T$. Nilai matriks $P_\infty = P_\infty^T$ maka P_∞ dapat diterapkan dalam penentuan nilai gain K_{LPV} . Sehingga diperoleh nilai gain K_{LPV} sebagai berikut

$$K_{LPV} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0,489 & -5,7 & 0,84 & 0,50 & -0,045 & 0,093 \\ -0,88 & -12 & 1,62 & 0,922 & -4,393 & -4,95 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Gain *feedback* K_{LPV} dapat diterapkan apabila nilai eigen dari $[A_c - BK_{LPV}C]$ untuk bagian *real*-nya bernilai negatif. Berikut adalah nilai eigen dari $[A_c - BK_{LPV}C]$:

$$\lambda_1 = -18,0895 + 1,3430i$$

$$\lambda_2 = -18,0895 - 1,3430i$$

$$\lambda_3 = -1,6924 + 8,2534i$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= -1,6924 - 8,2534i \\
\lambda_5 &= -0,3701 + 4,1703i \\
\lambda_6 &= -0,3701 - 4,1703i \\
\lambda_7 &= -0,0064 \\
\lambda_8 &= -0,9798 \\
\lambda_9 &= -2,6871
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Pada persamaan (4.66) semua bagian *real*-nya bernilai negatif, maka sistem $[A_c - BK_{LPV}C]$ merupakan sistem yang stabil. Oleh karena itu, gain K_{LPV} dapat diterapkan.

4.4 Simulasi dengan Simulink MATLAB

Simulasi sistem dilakukan untuk melakukan pengamatan terhadap karakteristik respon sistem. Pada saat dilakukannya simulasi, karakteristik utama yang diamati adalah waktu dimana sistem mencapai kondisi stabil (t_s) sesuai dengan *setpoint* yang diberikan dan *overshoot* (o_s). *Overshoot* yaitu *error* yang terjadi antara keluaran dengan *setpoint* yang telah ditentukan. Berdasarkan pada persamaan (4.59)-(4.61) maka model ruang keadaan gerak lateral direksional pesawat LSU-05 dapat diubah menjadi:

$$\dot{x}(t) = [A_c - BK_{LPV}C]x(t) + Bu(t) + B_1w(t)$$

Dimana,

$$A_c - BK_{LPV}C = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,18254 & 0 & 0 & -0,2472 & 0 & 0 \\ -21,0694 & -16,0572 & 0,8725 & 0 & 0 & -36,2629 & -688,446 & 0 & 0 \\ 24,5084 & -16,6513 & -3,5384 & 0 & 0 & -0,6736 & -67,9827 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 27,78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1134 & 0,3078 & 0 & 3,6032 & 0,4586 & -20 & 0 & -0,3463 & -0,0761 \\ -0,0834 & 0,0621 & 0 & 1,0731 & 0,1089 & 0 & -2 & -0,0761 & 0,3463 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_{LQ} &= \begin{bmatrix} -0,0153 & -0,1796 & 0,0228 & 0,0173 & -0,0057 & 0,0038 \\ -0,0310 & -0,5354 & 0,0543 & 0,0379 & -0,0413 & -0,1727 \end{bmatrix} \\
 K_{LPV} &= 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0,489 & -5,7 & 0,84 & 0,50 & -0,045 & 0,093 \\ -0,88 & -12 & 1,62 & 0,922 & -4,393 & -4,95 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tujuan dilakukannya simulasi ini adalah untuk mengetahui kestabilan gerak *roll* yang terjadi pada LSU-05. Kondisi awal pada saat simulasi, pesawat LSU-05 terbang dengan kondisi *wing level* yaitu pesawat terbang lurus tanpa membuat sudut kemiringan, baik terhadap sudut *roll*, *pitch* maupun pada sudut *yaw*. Selanjutnya, pesawat LSU-05 akan melakukan *rolling* dengan sudut sebesar 0,2 rad atau sebesar 11,465°. Nilai masukan pada sistem adalah 0,2 rad pada perubahan sudut *roll* (ϕ). Dengan kata lain, sudut *roll* awal (ϕ_o) pada simulasi ini sebesar 0 rad selanjutnya dilakukan *rolling* dengan perubahan sudut sebesar 0,2 rad, sehingga sudut *roll* akhir

(ϕ_f) yang terbentuk adalah sebesar 0,2 rad dengan toleransi *overshoot* maksimum sebesar 15%.

4.4.1. Representasi Diagram Blok pada Sistem Awal

Tahap pertama pada langkah ini akan dilakukan simulasi pada siste awal tanpa adanya perancangan kendali. Adapun sistem yang akan disimulasikan adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gr$$

$$y(t) = Cx(t) + Fr$$

$$z(t) = Hx(t)$$

Dengan nilai matriks A, B, G sebagai berikut:

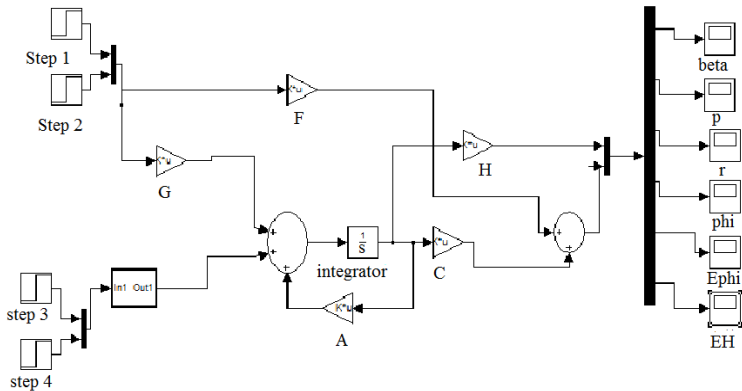
$$A = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1827 & 0 & 0 & -0,24719 & 0 & 0 \\ -21,063 & -16,055 & 0,87229 & 0 & 0 & -36,263 & -688,44 & 0 & 0 \\ 24,512 & -16,651 & -3,5379 & 0 & 0 & -0,67252 & -67,983 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0026 & -0,029766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -U_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \\ \Delta H \\ \delta_A \\ \delta_R \\ \varepsilon_H \\ \varepsilon_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\Delta H} \\ \Delta r_\phi \end{bmatrix}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \\ \Delta H \\ \delta_A \\ \delta_R \\ \varepsilon_H \\ \varepsilon_\phi \end{bmatrix}$$

Pada simulasi ini diberikan *setpoint* sebagai target pesawat untuk melakukan gerak *roll* sebesar 0.2 rad. Representasi diagram blok Simulink dari persamaan di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram Blok Simulink Sistem Awal

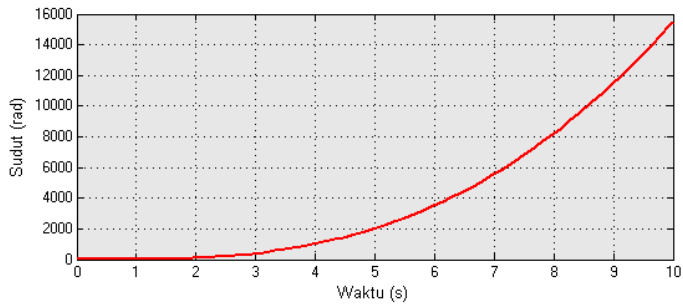
Dengan representasi nilai matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -2,3817 & 0 & -1,0019 & 2,1827 & 0 & 0 & -0,24719 & 0 & 0 \\ -21,063 & -16,055 & 0,87229 & 0 & 0 & -36,263 & -688,44 & 0 & 0 \\ 24,512 & -16,651 & -3,5379 & 0 & 0 & -0,67252 & -67,983 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0026 & -0,029766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -U_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 H &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pada Gambar 4.1 di atas terdapat integrator $\frac{1}{s}$ yang berfungsi sebagai pengintegral semua variabel \dot{x} menjadi x . Variabel \dot{x} yang dimaksud yaitu matriks $[\Delta\dot{\beta}, \Delta\dot{p}, \Delta\dot{r}, \Delta\dot{\phi}, \Delta\dot{H}, \dot{\delta}_A, \dot{\delta}_T, \dot{\varepsilon}_H, \dot{\varepsilon}_\phi]^T$ diubah menjadi $[\Delta\beta, \Delta p, \Delta r, \Delta\phi, \Delta H, \delta_A, \delta_T, \varepsilon_H, \varepsilon_\phi]^T$.

Hasil simulasi pada keluaran sudut *roll* (ϕ) pada sistem awal tanpa adanya kendali dapat dilihat pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Hasil Keluaran ϕ pada Sistem Awal

Hasil simulasi pada Gambar 4.2 pada sumbu vertikal menunjukkan besar sudut dalam satuan rad dan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu dengan satuan detik. Pada Gambar 4.2 terlihat bahwa perubahan sudut yang terjadi pada keluaran tidak sesuai dengan *setpoint* yang diberikan. Besar perubahan sudut yang diharapkan sebesar 0,2 rad. Akan tetapi, perubahan sudut yang terjadi tidak terkendali, sehingga tidak dapat dilakukan pengamatan pada sistem. Oleh karena itu, diperlukan adanya pengendali pada sistem agar keluaran yang terjadi pada sistem sesuai dengan yang diinginkan.

4.4.2. Representasi Diagram Blok pada Sistem dengan Optimasi Linear Quadratic

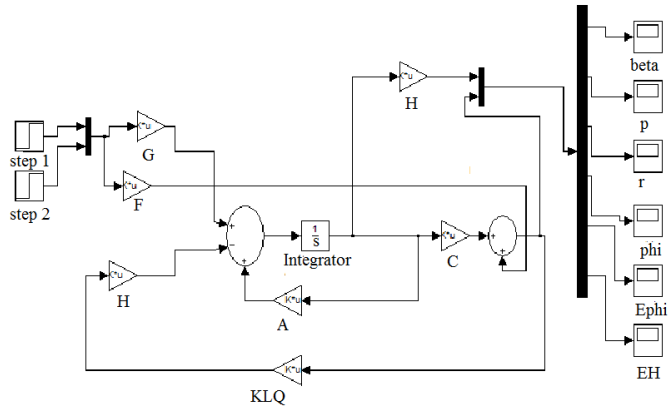
Pada tahap kedua ini, dilakukan perancangan optimasi kontrol LQ pada sistem dengan tujuan untuk mengurangi terjadinya kesalahan pada sistem awal. Sistem persamaan dengan kendali LQ adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = (A - BK_{LQ}C)x(t) + (G - BK_{LQ}F)r$$

Pada simulasi ini akan dilakukan beberapa kali percobaan dengan *setpoint* yang dimasukkan berubah-ubah tanpa merubah nilai gain yang telah didapat. *Setpoint*

yang akan digunakan dalam simulasi ini yaitu sebesar 0,1 rad, 0,2 rad, dan 0,3 rad.

Representasi diagram blok Simulink dari persamaan di atas adalah sebagai berikut:

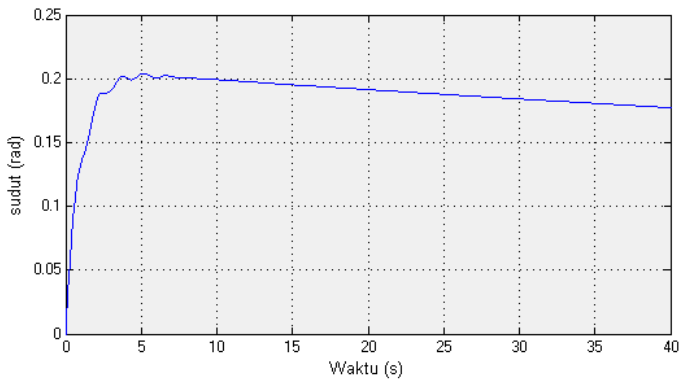


Gambar 4.3 Representasi Diagram Blok Pada Sistem dengan Kontrol Optimasi LQ

Representasi nilai *gain feedback* K_{LQ} sebagai gain kontroler adalah sebagai berikut:

$$K_{LQ} = \begin{bmatrix} -0,0153 & -0,1796 & 0,0228 & 0,0173 & -0,0057 & 0,0038 \\ -0,0310 & -0,5354 & 0,0543 & 0,0375 & -0,0413 & -0,1727 \end{bmatrix}$$

Dengan mengikutsertakan gain *feedback* kontrol LQ diperoleh hasil simulasi keluaran untuk sudut *roll* dapat dilihat pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Keluaran Sudut ϕ dengan Menggunakan Kendali Optimasi LQ

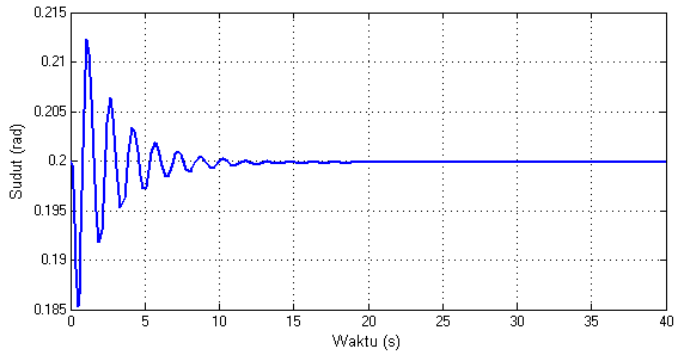
Simulasi di atas dilakukan dengan $t_o = 0$ sampai $t_f = 40$ detik dengan sumbu vertikal menunjukkan besar sudut dan sumbu horizontal menunjukkan waktu tempuh. Hasil simulasi pada Gambar 4.4 merupakan hasil keluaran sistem dengan menggunakan gain optimasi LQ dengan *setpoint* yang diberikan adalah sebesar 0,2 rad atau $11,46^\circ$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *roll* stabil pada sudut 0,2 rad pada detik ke 3,35 dengan nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,02 rad atau sebesar 10%. Pada gambar 4.4 tersebut diketahui bahwa sistem berada tepat pada sudut 0,2 rad selama 7 detik. Pada detik ke 11 sistem semakin turun, tetapi masih berada pada batas toleransi *overshoot* sehingga sistem masih dapat dikatakan stabil. nilai parameter yang diperoleh dari simulasi ini yaitu *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise time* (t_r) sistem terjadi selama 1,9 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan

sistem selama 3,9 detik. Waktu sistem untuk mencapai titik lewatan pertama selama 3,63 detik.

Simulasi kedua dilakukan dengan *setpoint* sebesar 0,1 rad atau sebesar $5,7^\circ$. Hasil dari simulasi ini didapat bahwa sudut *roll* stabil pada sudut 0,1 rad pada detik ke 3,1 dengan nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,01 rad atau sebesar 10%. Pada simulasi ini *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise time* (t_r) sistem terjadi selama 1,86 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan sistem selama 3,8 detik. Waktu sistem untuk mencapai titik lewatan pertama selama 3,55 detik.

Simulasi ketiga dilakukan dengan *setpoint* sebesar 0,3 rad atau sebesar $17,1^\circ$. Hasil dari simulasi ini didapat bahwa sudut *roll* stabil pada sudut 0,3 rad pada detik ke 3, dengan nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,03 rad atau sebesar 10%. Pada simulasi ini *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise time* (t_r) sistem terjadi selama 1,86 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan sistem selama 3,8 detik. Waktu sistem untuk mencapai titik lewatan pertama selama 3,72 detik.

Error yang terjadi pada sudut *roll* sebesar 0,2 rad dapat dilihat pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Keluaran *Error Sudut roll (ϕ)*

Pada Gambar 4.5 sumbu vertikal menunjukkan besar sudut yang terbentuk dan sumbu horizontal menunjukkan waktu tempuh sudut yang terbentuk. Disana terlihat bahwa grafik mengalami osilasi kurang lebih selama 15 detik sebelum sistem stabil pada sudut 0,2 rad. Osilasi pada grafik memiliki rentang *overshoot* pada puncak $0,1853 \leq o_s \leq 0,2123$, dengan kata lain nilai *overshoot*-nya kurang dari 10% atau hanya sebesar 6,25%. Pada *setpoint* 0,1 rad, terjadi osilasi dengan rentang *overshoot* pada $0,093 \leq o_s \leq 0,106$, dengan kata lain *overshoot* yang terjadi hanya sebesar 7%. Pada *setpoint* 0,3 rad, osilasi yang terjadi pada rentang $0,278 \leq O_s \leq 0,318$, atau nilai *overshoot* yang terjadi sebesar 6,6%. Dikarenakan nilai *overshoot* yang terjadi kurang dari 10%, maka sistem kendali dapat digunakan.

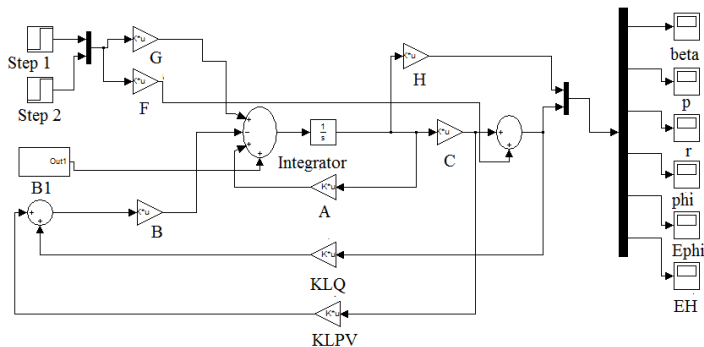
4.4.3. Representasi Diagram Blok pada Sistem dengan Kontrol LPV

Pada langkah ini, dilakukan perancangan kontrol LPV pada sistem dengan tujuan untuk mengurangi terjadinya kesalahan pada sistem dengan adanya gangguan. Sehingga sistem persamaannya sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = (A_c - BK_{LPV}C)x(t) + B_1w(t)$$

Pada simulasi ini juga diberikan *setpoint* yang merupakan target pesawat untuk melakukan gerak *roll*, yaitu sebesar 0,2 rad.

Representasi diagram blok Simulink dari persamaan di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 4.6 Representasi Diagram Blok Pada Sistem dengan Kontrol LPV

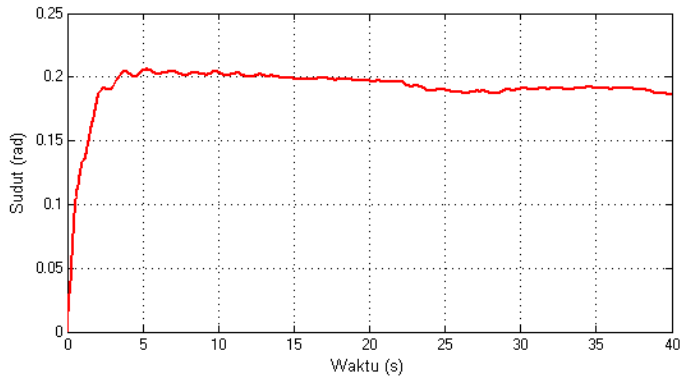
Dengan representasi nilai gain *feedback* K_{LPV} adalah sebagai berikut:

$$K_{LPV} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0,489 & -5,7 & 0,84 & 0,50 & -0,045 & 0,093 \\ -0,88 & -12 & 1,62 & 0,922 & -4,393 & -4,95 \end{bmatrix}$$

Pada simulasi ini diberikan gangguan yang terjadi pada sistem dengan representasi matriks gangguan sebagai berikut:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil simulasi keluaran untuk sudut *roll* adalah sebagai berikut:



Gambar 4.7 Keluaran Sudut Roll (ϕ) dengan menggunakan Kontrol LPV

Simulasi pada diagram blok Gambar 4.6 menggunakan $t_o = 0$ sampai $t_f = 40$ detik. Hasil simulasi pada Gambar 4.8 sumbu vertikal menunjukkan besar sudut yang terbentuk dan sumbu horizontal menunjukkan waktu tembus besar sudut terbentuk. Hasil pada simulasi tersebut merupakan hasil keluaran sistem

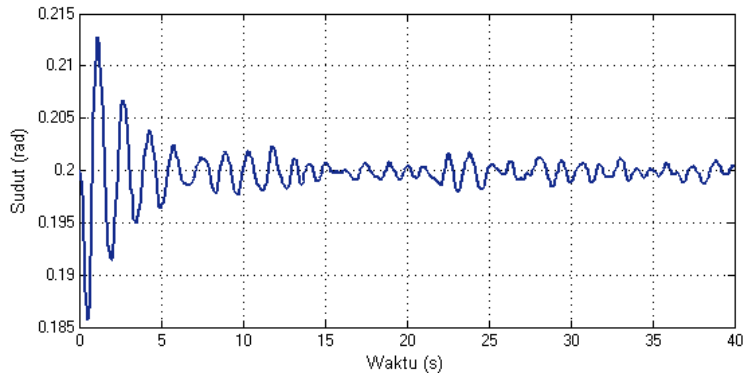
dengan menggunakan gain kendali LPV dengan *setpoint* yang diberikan adalah sebesar 0,2 rad atau $11,46^\circ$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *roll* stabil pada sudut 0,2 rad pada detik ke 3,35 dengan nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,0135 rad atau sebesar 6,75%. Pada detik ke 22 sistem mengalami penurunan grafik, akan tetapi masih berada pada batas toleransi *overshoot* sehingga sistem masih dapat dikatakan stabil. nilai parameter kendali yang diperoleh yaitu *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise time* (t_r) sistem terjadi selama 1,8 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan sistem selama 3,35 detik. Waktu sistem untuk mencapai lewatan pertama adalah selama 3,7 detik.

Simulasi kedua dilakukan dengan menggunakan *setpoint* sebesar 0,1 rad atau $5,7^\circ$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *roll* stabil pada sudut 0,2 rad pada detik ke 3,35 dengan nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,0043 rad atau sebesar 4,3%. Pada simulasi ini *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise time* (t_r) sistem terjadi selama 1,7 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan sistem selama 3,75 detik. Waktu sistem untuk mencapai lewatan pertama adalah selama 3,7 detik.

Simulasi ketiga dilakukan dengan menggunakan *setpoint* sebesar 0,3 rad atau $17,1^\circ$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *roll* stabil pada sudut 0,3 rad pada detik ke 3,35 dengan nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,007 rad atau sebesar 2,3%. Pada simulasi ini *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise*

t_r) sistem terjadi selama 1,7 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan sistem selama 3,8 detik. Waktu sistem untuk mencapai lewatan pertama adalah selama 3,7 detik.

Dilakukan simulasi Hasil simulasi gerak pesawat pada saat membentuk sudut 0,2 rad adalah sebagai berikut:



Gambar 4.8 Hasil Keluaran *Error Sudut Roll* Pada Sudut 0,3 rad.

Pada Gambar 4.8 terjadi pada *setpoint* 0,2 rad. Disana terlihat bahwa grafik mengalami osilasi. Osilasi pada grafik memiliki rentang *overshoot* pada puncak $0,198 \leq O_s \leq 0,212$, dengan kata lain nilai *overshoot*-nya kurang dari 10% atau hanya sebesar 6,25%. Pada *setpoint* 0,1 rad, terjadi osilasi dengan rentang *overshoot* pada $0,093 \leq o_s \leq 0,106$, dengan kata lain *overshoot* yang terjadi hanya sebesar 7%. Pada *setpoint* 0,2 rad, osilasi yang terjadi pada interval $0,186 \leq O_s \leq 0,2127$, atau nilai *overshoot* yang terjadi sebesar 6,6%. Dikarenakan nilai *overshoot* yang terjadi kurang dari 10%, maka sistem kendali dapat digunakan.

Sesuai dengan hasil di atas dapat diketahui bahwa hasil dari simulasi pada sistem adalah sistem terkendali. Oleh karena itu sistem kendali H_∞ dapat diterapkan dalam pengendalian gerak *roll* matra lateral-direksional pesawat LSU-05.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis yang telah dilakukan didapatkan nilai gain K_{LQ} dan K_{LPV} yang dapat digunakan dalam perancangan sistem kendali H_∞ sebagai berikut:

$$K_{LQ} = \begin{bmatrix} -0,0153 & -0,1796 & 0,0228 & 0,0173 & -0,0057 & 0,0038 \\ -0,0310 & -0,5354 & 0,0543 & 0,0375 & -0,0413 & -0,1727 \end{bmatrix}$$

dan

$$K_{LPV} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0,489 & -5,7 & 0,84 & 0,50 & -0,045 & 0,093 \\ -0,88 & -12 & 1,62 & 0,922 & -4,393 & -4,95 \end{bmatrix}$$

2. Berdasarkan nilai gain *feedback* K_{LQ} diperoleh nilai parameter gerak *roll* yaitu lama *delay time* 0,1 detik, lama *rise time* 1,86 detik, waktu yang dibutuhkan untuk mencapai *settling time* adalah 3,7 detik dan waktu yang dibutuhkan untuk mencapai lewatan pertama adalah 3,6 detik.
3. Berdasarkan nilai gain *feedback* K_{LPV} diperoleh nilai parameter gerak *roll* yaitu nilai maksimum *overshoot* (M_p) sebesar 0,0135 rad atau sebesar 6,75%. Waktu yang diperlukan untuk *delay time* (t_d) selama 0,1 detik, *rise time* (t_r) sistem terjadi selama 1,8 detik. *Settling time* (t_s) yang dibutuhkan sistem selama 3,35 detik. Waktu sistem untuk mencapai lewatan pertama adalah selama 3,7 detik.

4. Berdasarkan pengamatan diketahui bahwa gain *feedback* K_{LPV} mampu memperkecil gangguan yang ada sehingga sistem kendali H_∞ dapat diterapkan dalam perancangan kendali pada LSU-05.

5.2 Saran

Saran penulis untuk perbaikan tugas akhir ini serta pengembangan penelitian selanjutnya adalah:

1. Matriks Q_c dan R_c dapat dicari dengan algoritma genetika.
2. Untuk gain K_{LPV} bisa dicari dengan menggunakan algoritma *convex hull*.
3. Pemanfaatan kendali robust dan kendali adaptif untuk hasil yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Khotimah, A. K. 2016. *Desain Sistem Kendali PID untuk Kestabilan Terbang Gerak Lateral-direksional LSU-05*. Laporan Kerja Praktek. Jurusan Matematika ITS: Surabaya.
- [2] Yue T, Wang LX, Ai JQ. *Gain self-scheduled H_{∞} Control for Morphing Aircraft in The Wing Transition Process Based on an LPV Model*. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013,26(4): 909-917.
- [3] Purwanto, E. B. 2015. *Pemodelan Awal dan Analisa Kestabilan LSU-05*. Seminar Nasional Ilmu Pengetahuan dan Teknologi Dirgantara XVIII. LAPAN.
- [4] Purnawan, H. 2015. *Desain Sistem Kendali Linear Quadratic Regulator (LQR) untuk Kestabilan Terbang LSU-05*. Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [5] Apkarian, P., P. Gahinet, G. Becker. 1995. *Self-Scheduled H_{∞} Control of LinearParameter Varying Systems*. Submitted to Automatica .
- [6] Ogata, K. 2010. *Modern Control Engineering. Fifth Edition*. Prentince Hall.
- [7] Subiono. 2013. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Jurusan Matematika ITS: Surabaya.
- [8] Balas, G.J. *Linear, Parameter-Varying Control And Its Application To Aerospace System*. ICAS 2002 Congress.
- [9] Muzaki, M. A. F. 2015. *Desain Kendali Sudut Pitch dan Roll pada LSU-05 dengan Metode Sliding Mode Control (SMC)*. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS.

- [10] Fajar, S.N. 2016. Desain dan Simulasi Sistem Kendali Linear Quadratic Gaussian (LQG) untuk Kestabilan Gerak Pitch LSU-05. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Ainun Kusnul Khotimah, lahir di Tulungagung, 11 Agustus 1993. Penulis merupakan anak bungsu dari sepuluh bersaudara dari pasangan Bapak Ma'ruf dan Ibu Katini. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari RA Tarbiyatussibyan (1998-2000), MI Tarbiyatussibyan (2000-2006), MTs Negeri Tunggangri (2006-2009), MAN 2 Tulungagung (2009-2012). Setelah lulus dari Madrasah Aliyah Negeri 2 Tulungagung penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS pada tahun 2012-sekarang melalui jalur SNMPTN Tulis dengan NRP 1212100066. Di Jurusan Matematika ITS penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui HIMATIKA ITS sebagai staff Depart. Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa (2013-2014), Bendahara Umum UKM Taekwondo ITS (2013-2014), staff Depart. Dana Usaha Ibnu Muqlah (2013-2014), staff Depart. Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa (2014-2015), dan Sekertaris Depart. Dana Usaha Ibnu Muqlah (2014-2015). Selain itu penulis juga melaksanakan Kerja Praktek di Pusat Teknologi Penerbangan LAPAN Bogor di Lab. Avionik pada tahun 2016.

Jika ingin memberikan saran, kritik dan diskusi terkait Tugas Akhir ini dapat ditunjukkan ke penulis melalui email: ainun1123@gmail.com